

MATEMÁTICA

MÓDULO 3



Ministerio de
Educación
Presidencia de la Nación



FINES

MATEMÁTICA

MÓDULO 3

Estudiante:



Matemática 3

Ministerio de Educación de la Nación

1° edición, abril 2015

Autoría

Equipo Pedagógico de la Dirección Nacional de Fortalecimiento y Ampliación de Derechos Educativos

Equipo de producción editorial

Supervisión pedagógica: Paula Grad

Corrector: Gustavo Romero

Diseño: María Denisse Balduzzi

Ilustración: Claudio Andaur

Cartografía: José Pais

AGRADECIMIENTOS

Archivo General de la Nación

Coordinación de Materiales Educativos de la Dirección Nacional de Gestión Educativa

Departamento de Áreas Curriculares de la Dirección Nacional de Gestión Educativa

Hemeroteca de la Biblioteca Nacional Mariano Moreno

Télam

Argentina. Ministerio de Educación de la Nación

Matemática 3. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Ministerio de Educación de la Nación, 2015.

118 p. : il. ; 29x21 cm.

ISBN 978-950-00-1085-6

1. Matemática. 2. Educación Secundaria. .

CDD 510.712

Fecha de catalogación: 13/04/2015

ÍNDICE

> *pág 7*

Introducción

> *pág 9 / Unidad I*

Sistemas de ecuaciones

Resolución de sistemas de ecuaciones.

Actividad integradora.

> *pág 25 / Unidad II*

Funciones cuadráticas

Funciones cuadráticas.

Actividad integradora.

> *pág 41 / Unidad III*

Proporcionalidad

Proporcionalidad numérica.

Trigonometría.

Actividad integradora.

> *pág 53 / Unidad IV*

Estadística descriptiva

La estadística.

Medidas de posición.

Actividad integradora.

> *pág 75 / Unidad V*

Probabilidad

La probabilidad.

Multiplicación y conteo.

Actividad integradora.

> *pág 87*

Actividad integradora del Módulo

> *pág 89*

Claves de corrección

> *pág 113*

Bibliografía, fuentes y otros recursos



INTRODUCCIÓN

Comenzamos a transitar el último año para terminar la secundaria. En el segundo módulo, resolvimos nuevos problemas, aprendimos a trabajar con ecuaciones, funciones lineales y expresiones algebraicas.

Descubrimos como la matemática es una herramienta que nos facilita la comprensión para entender y analizar situaciones que se nos presentan a diario, como por ejemplo cuando pagamos en un almacén, cuando vemos gráficos en alguna revista, cuando tenemos que pensar en cómo administrar mejor nuestro sueldo.

Por eso, en este último módulo nos proponemos nuevos ejercicios y actividades para seguir aprendiendo y avanzando en este camino que nos llevará a completar los estudios secundarios.

En este tercer módulo de Matemática, usted encontrará contenidos que se desarrollan en las siguientes unidades:

Unidad I: "Sistemas de ecuaciones" se trabajará con situaciones que para ser resueltas requieran conjuntos de ecuaciones de varias variables. **Unidad II:** "Funciones cuadráticas" estudiaremos el comportamiento, la gráfica y las aplicaciones de funciones con fórmula cuadrática. **Unidad III:** "Proporcionalidad" abordaremos las relaciones proporcionales tanto desde la aritmética como desde la geometría. **Unidad IV:** "Estadística descriptiva" trabajaremos los elementos básicos para entender, comparar y confeccionar estadísticas, usando tablas de datos y gráficos. Y por último, en la **Unidad V:** "Probabilidad" estudiaremos las herramientas para evaluar y predecir los posibles resultados de situaciones donde interviene el azar.

Al finalizar este módulo habrá una "Actividad integradora", para repasar e integrar los contenidos de las unidades y las "Claves de corrección" de todas las actividades.





UNIDAD I



SISTEMAS DE ECUACIONES



PARA DISPARAR IDEAS

El 10 de junio de 2014 se realizó el 9° sorteo de PRO.CRE.AR., por medio del cual 138.015 familias pudieron comenzar a tramitar su crédito en el Banco Hipotecario.

El sorteo, con sede en la Lotería Nacional y con la locución de Riverito, contempló las líneas tradicionales (construcción, refacción y ampliación o terminación) por las que salieron ganadoras en el sorteo 85.293 familias. Además, se efectuó un repechaje para las líneas de construcción y refacción o ampliación en el que resultaron beneficiados 52.722 inscriptos.

Fuente: <http://www.anses.gob.ar/destacados/procrear>

Sorteo	Cantidad de inscriptos	Cantidad de ganadores
Construcción	82.139	46.326
Refacción / ampliación	64.079	38.967
Repechaje construcción	48.067	27.762
Repechaje refacción / ampliación	40.232	24.960

- a) ¿Qué porcentaje de los inscriptos para construir vivienda puede comenzar su trámite sin participar del repechaje?
- b) ¿Qué porcentaje de los inscriptos para refaccionar o ampliar vivienda puede comenzar su trámite participando del repechaje?
- c) Uno de los modelos de las casas es el siguiente: "Clásica, techo plano, un dormitorio", frente de 8,66 m y superficie total: 53 m²

LIVING COMEDOR: 20 m²

COCINA: 7 m²

BAÑO: 4 m²

DORMITORIO: 12 m²





<http://www.anses.gob.ar/destacados/procrear>

¿Qué porcentaje de la vivienda está destinado al dormitorio? ¿Cuál es la superficie cubierta que se construye si la casa tiene $8,66 \text{ m} \times 5 \text{ m}$? Si de los 53 m^2 de superficie se destinan 20 m^2 al living comedor, 7 m^2 a la cocina, 4 m^2 al baño y 12 m^2 al dormitorio, ¿qué superficie queda libre para otros usos?

ANALICE ALGUNAS SOLUCIONES POSIBLES

- a) El 56,39 % podrá comenzar su trámite para construir su vivienda.
- b) El 38,95 % de los inscriptos podrá ampliar o refaccionar su vivienda habiendo participado del repechaje.
- c) El 22,64 % de la vivienda está destinada al dormitorio. La superficie cubierta es de 43 m^2 y la libre es de 10 m^2 .

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones con varias variables. Llamamos conjunto solución del sistema a la o las soluciones que satisfacen al mismo tiempo a todas las ecuaciones del sistema.

PARA ANALIZAR Y RESPONDER

La suma de dos números es 5:

- Nombre parejas de números que satisfagan la condición.
- Escriba las parejas de números como pares ordenados.
- Escriba en símbolos "la suma de dos números es 5".
- Si además de cumplir con la condición de sumar 5, el segundo número tiene que ser el cuádruple del primero, escriba en símbolos las dos condiciones.
- ¿Cuáles son esos números?

ANALICE ALGUNAS SOLUCIONES POSIBLES

- Podemos nombrar las siguientes parejas de números: 2 y 3; 1 y 4; -5 y 10, 0 y 5, 2,5 y 2,5 (esto es un ejemplo, son infinitas las parejas posibles).
- Se pueden nombrar como pares ordenados: (2; 3) (1; 4) (2,5; 2,5)
- En símbolos podemos escribir $x + y = 5$
- Al tener dos condiciones, las podemos escribir de la siguiente forma:
Llamando x al "primer número" e y al "segundo número"

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y = 4x \end{cases}$$

Estas dos ecuaciones con dos incógnitas forman un **sistema de ecuaciones** cuya solución es el par ordenado que verifica las dos ecuaciones simultáneamente, en este caso (1; 4)

Verifique:

$$\begin{cases} 1 + 4 = 5 \\ 4 = 4 \cdot 1 \end{cases}$$

Observación: al ser un sistema sencillo nos fue posible hallar los resultados "probando". Pero en otros sistemas, será necesario utilizar algún método para encontrar las soluciones buscadas.

- De las parejas nombradas, solamente es válido el par (1;4).

MÉTODO DE IGUALACIÓN

En muchas ocasiones nos enfrentamos a situaciones en las que se plantea más de una condición por lo que es necesario plantear más de una ecuación.

“Hallar dos números reales tales que sumen 10 y su diferencia sea 2”.

Podemos nombrar las parejas de números que cumplen con las dos condiciones pero una forma de resolver la situación consiste en llamar “x” al primer número e “y” al segundo y traducir en ecuaciones el enunciado del problema:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Una forma sencilla de resolverlo consiste en despejar “x” de cada ecuación y luego igualar. Este modo de resolución se denomina **método de igualación**.

De la primera ecuación despejamos $x = 10 - y$ de la segunda, $x = 2 + y$. Igualamos dichas expresiones y resolvemos.

$$\begin{aligned} 10 - y &= 2 + y \\ 10 - 2 &= y + y \\ 8 &= 2y \\ 4 &= y \end{aligned}$$

Por lo cual si ambos números sumaban 10 y uno de ellos es 4, el otro número es 6.

$$S = \{(6; 4)\}$$

Verificamos reemplazando “x” e “y” en ambas ecuaciones del sistema:

$$\begin{aligned} 6 + 4 &= 10 \\ 6 - 4 &= 2 \end{aligned}$$

✘ ACTIVIDAD

1) En un partido de fútbol se hicieron 8 goles. Si un equipo hizo 2 goles más que el otro, el resultado del partido fue:

a) 4 a 4

b) 6 a 2

c) 5 a 3

d) 4 a 2



2) Resuelva y verifique el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

3) La suma de dos números es 5. Si al triple del primero le sumo el doble del segundo obtengo 12, ¿cuáles son los números?

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

En un rectángulo, la base es el doble de la altura; si el perímetro es 120 cm, calcule las medidas de la base y de la altura.

Llamemos B a la medida de la base del rectángulo y H a la medida de su altura. En este caso el semiperímetro (mitad del perímetro) es 60 cm, por lo cual podemos escribir:

$$\begin{cases} B + H = 60 \\ B = 2H \end{cases}$$

Otra de las formas de resolver un sistema de ecuaciones es utilizar el **método de sustitución** que consiste en despejar una de las variables en una de las ecuaciones y reemplazarla en la otra ecuación.

Si reemplazamos B por 2H en la primera ecuación resulta:

$$\begin{aligned} B + H &= 60 \\ 2H + H &= 60 \\ 3H &= 60 \\ H &= 20 \end{aligned}$$

Reemplazamos H por 20 en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener el valor de B

$$\begin{aligned} B &= 2H \\ B &= 2 \cdot 20 \\ B &= 40 \end{aligned}$$

Verificación:

$$\begin{aligned} B + H &= 60 \\ B &= 2H \\ 40 + 20 &= 60 \\ 40 &= 2 \cdot 20 \end{aligned}$$

Respuesta: La base mide 40 cm y la altura mide 20 cm.

Este problema también se puede resolver por el **método de igualación**, que como vimos, consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} B + H = 60 \\ B = 2H \end{cases}$$

Despejamos "B" de la primera ecuación

$$\begin{aligned} B + H &= 60 \\ B &= 60 - H \end{aligned}$$

Luego se puede igualar con la segunda ecuación y se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} 60 - H &= 2H \\ 60 &= 2H + H \\ 60 &= 3H \\ 20 &= H \end{aligned}$$

Por lo cual

$$B = 60 - 20 = 40$$

Respuesta: La base mide 40 cm y la altura mide 20 cm.

✘ ACTIVIDAD

4) Plantee los sistemas de ecuaciones correspondientes a cada problema y resuélvalos con el método que le resulte más conveniente:

- La suma de un número más el triple de otro es igual a 11. Si del triple del primero se resta el doble del segundo se obtiene -22, ¿cuáles son esos números?
- Daniel cambió un billete de \$50 por billetes de \$10 y de \$2. Sabiendo que tiene en total 9 billetes, ¿cuántos billetes tiene de cada valor?
- El perímetro de un rectángulo es de 24 metros. Si la base mide 2 metros más que la altura, ¿cuáles son las dimensiones?

MÉTODO GRÁFICO

Otra forma de resolver un sistema de ecuaciones es aplicando el **método gráfico**.

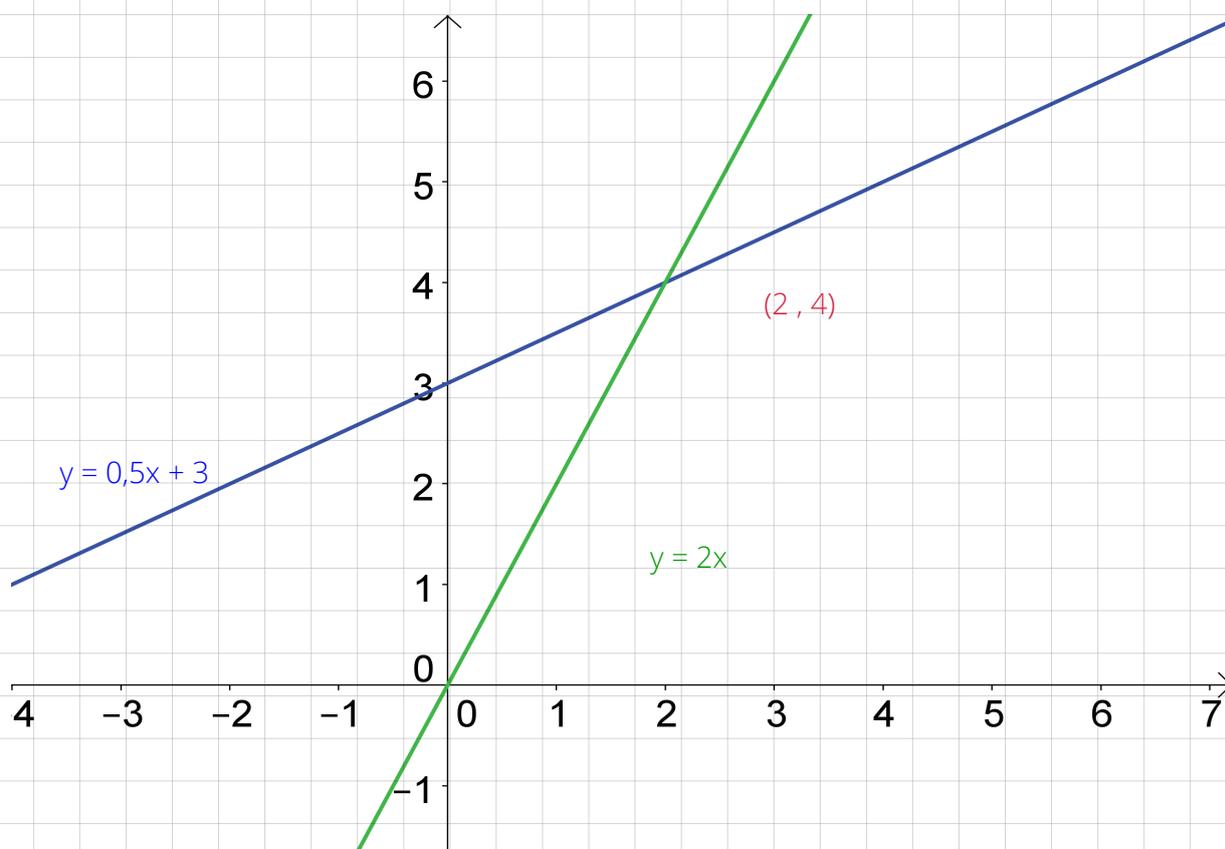
$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 0,5x + 3 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} 2x &= 0,5x + 3 \\ 2x - 0,5x &= 3 \\ 1,5x &= 3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Para obtener "y" reemplazamos en cualquiera de las ecuaciones:

$$y = 2x \quad y = 2 \cdot 2 = 4$$

El punto de intersección es (2; 4).

$y = 0,5x + 3$ es una función lineal que pasa por infinitos puntos, pero si es parte de un sistema junto con $y = 2x$; observamos que determinan un punto en el cual se cortan. Se llama punto de intersección y por medio del método gráfico se observa la solución $S = \{(2; 4)\}$



✖ ACTIVIDAD

5) Resuelva

- Grafique $y = 2x + 4$
- En el mismo par de ejes que la función anterior, grafique $y = x + 1$
- Identifique en la gráfica el punto en el cual se cortan las dos funciones.
- Obtenga el conjunto solución del sistema formado por las dos ecuaciones y verifique el resultado obtenido.

6) Resuelva gráfica y analíticamente el siguiente sistema de ecuaciones, indique conjunto solución y verifique el resultado obtenido.

$$y = x + 3$$

$$\text{a) } \begin{cases} y = 2x - 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} y = 2x + 2 \end{cases}$$

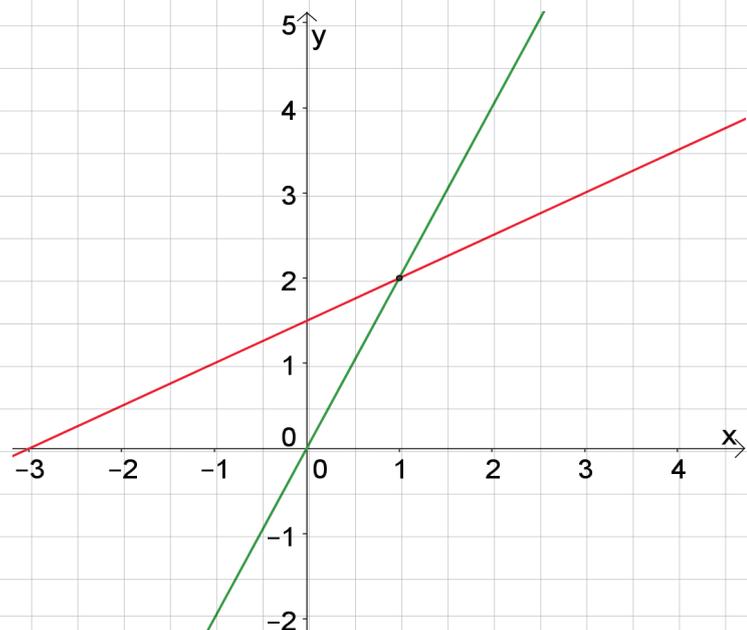
$$y = x - 2$$

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES

Un sistema de ecuaciones puede tener **una solución, infinitas o ninguna**.

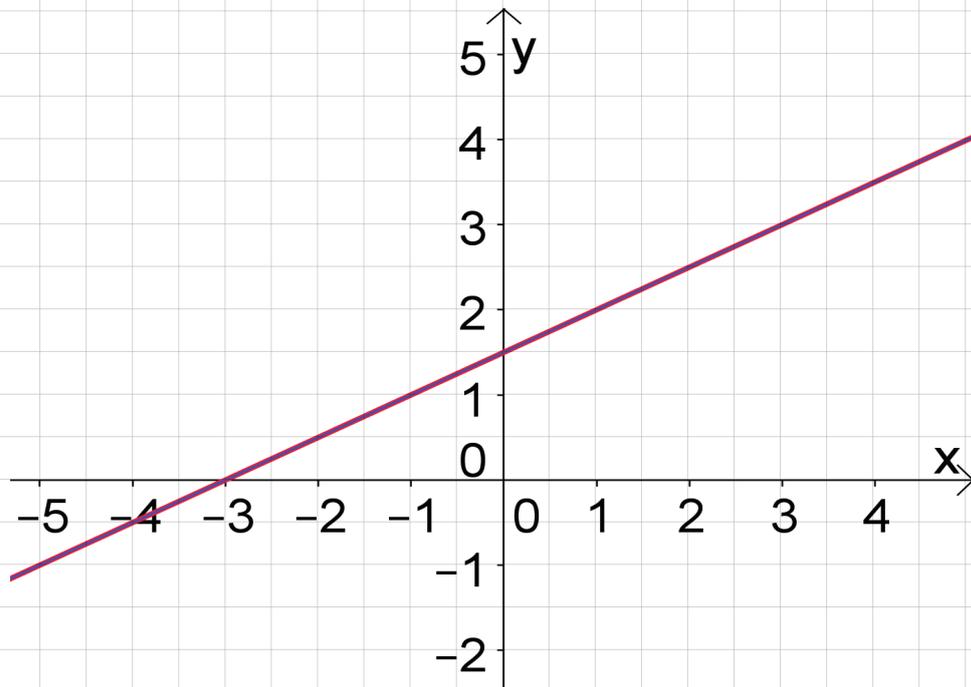
Aplicando el método gráfico, las rectas del sistema pueden resultar **secantes, coincidentes o paralelas** respectivamente.

Si las rectas son secantes, se cortan en un solo punto y la solución será única. Al sistema se lo llama entonces,



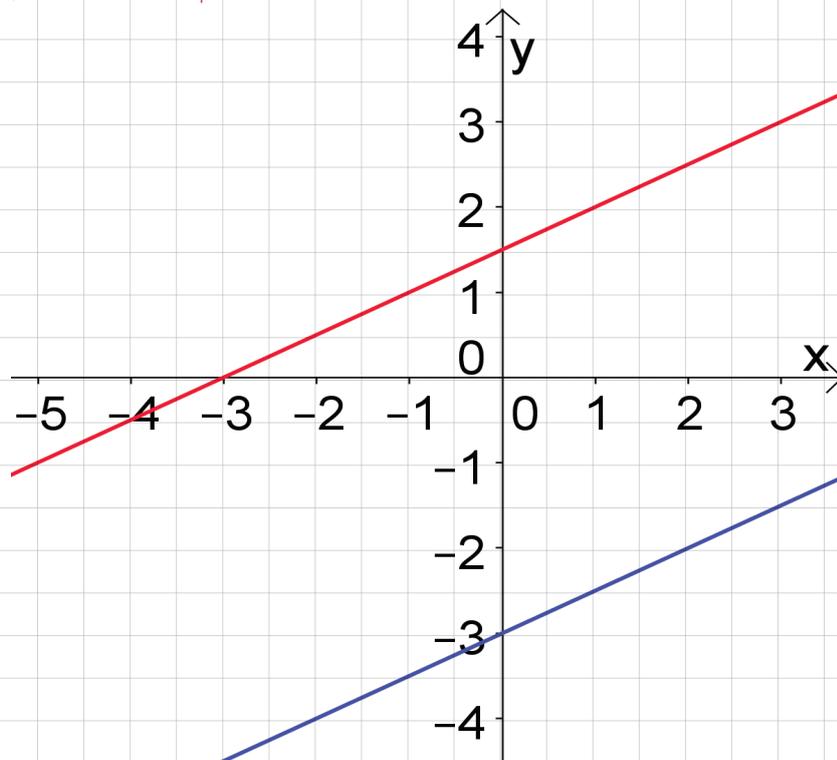
compatible determinado.

Si las rectas son coincidentes, es decir se superponen, se cortan en infinitos puntos. En consecuencia,



el sistema tendrá infinitas soluciones y se lo llama sistema compatible indeterminado.

Si las rectas son paralelas, o sea que no se cortan en ningún punto, el sistema no tiene solución y se lo denomina sistema incompatible.



✘ ACTIVIDAD

7) Despeje "y" de cada ecuación del sistema, grafique ambas rectas en un mismo par de ejes cartesianos y clasifique el sistema.

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ y = -2x - 8 \end{cases}$$

8) Resuelva analítica (método de sustitución o igualación) y gráficamente. Luego clasifique los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ y + x - 4 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 3 = y \\ 3x + y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + 2y = 6 \\ -2x - 12 = y \end{cases}$

ACTIVIDAD

INTEGRADORA

9) Resuelva

- Grafique los puntos (8; -6) y (4; 2) en un mismo par de ejes cartesianos.
- Halle la expresión de la recta que pasa por dichos puntos.
- Dado el enunciado: "a cada número se le hace corresponder su duplo más 2". Escriba en lenguaje simbólico y grafique dicha ecuación en el mismo par de ejes que la anterior.
- Construya con ambas ecuaciones un sistema de ecuaciones lineales.
- Halle la solución del sistema gráfica y analíticamente.
- Verifique el resultado obtenido.

10) Indique cuál de las siguientes opciones es el conjunto solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 24 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$$

- | | |
|---------------------|--|
| a) $S = \{(4; 4)\}$ | b) $S = \{(5; 4)\}$ |
| c) $S = \{(5; 2)\}$ | d) Ninguna de las respuestas anteriores. |

11) Plantee los sistemas de ecuaciones correspondientes a cada problema y resuélvalos con el método que crea más conveniente.

- La suma de un número más el duplo de otro es igual a 16. Si del triple del primero se resta el segundo se obtiene 20. ¿Cuáles son esos números?
- La suma de dos distancias es de 500 km y la diferencia entre ellas es 100 km.
- La diferencia entre las edades de dos hermanos es de 2 años. Si sumo las edades de ambos obtengo 58 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

12) Resuelva por el método de sustitución o igualación y luego verifique el resultado obtenido.

a)
$$\begin{cases} 2x - 5 = y \\ x - 7 + y = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + 4y = 2 \\ -x + y = 8 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$$

13) La suma de dos números es 10 y la diferencia entre ellos es 2. ¿Cuáles son los números? Plantee el sistema, resuelva y verifique el resultado obtenido.

14) Reemplace los valores de "x" e "y" e indique, entre los siguientes, cuál es el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} 2y + 5x = 2 \\ y = 5x + 1 \end{cases}$$

a) $S = \{(0; -4)\}$

b) $S = \{(0; 0)\}$

c) $S = \{(0; 1)\}$

d) Ninguna de las respuestas anteriores.

15) Resuelva

a) Grafique $\begin{cases} y = 7 - x \\ y = 3x + 3 \end{cases}$ en el mismo par de ejes que la recta anterior.

b) Identifique en la gráfica el punto en el cual se cortan las dos rectas.

c) Compruebe en forma analítica el resultado obtenido a través del gráfico.

16) Resuelva gráficamente el siguiente sistema de ecuaciones, halle el conjunto solución y verifique el resultado obtenido.

$$\begin{cases} y = 4 - x \\ y = x - 6 \end{cases}$$

17) Plantee los sistemas de ecuaciones correspondientes y encuentre el conjunto solución con el método que crea más conveniente.

- a) El perímetro de un rectángulo es 32 m y la base es el triple de la altura, ¿cuáles son sus dimensiones?
- b) La suma de dos números es 36. El primero es el doble del segundo, ¿cuáles son esos números?

18) Resuelva gráficamente el siguiente sistema de ecuaciones y halle el conjunto solución.

$$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = x + 6 \end{cases}$$

19) Resuelva

- a) Grafique los puntos (1; 5) y (2; 4) en un mismo par de ejes cartesianos.
- b) Halle la ecuación de la recta que pasa por dichos puntos.
- c) Dado el enunciado: "a cada número se le hace corresponder su triple, menos 2". Escriba en lenguaje simbólico y grafique dicha ecuación en el mismo par de ejes que la anterior.
- d) Construya con ambas ecuaciones un sistema de ecuaciones lineales.
- e) Halle la solución del sistema gráfica y analíticamente.
- f) Verifique el resultado obtenido.

20) Resuelva por el método de sustitución o igualación:

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x - y = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x - 3y = -1 \\ 4x + 3y = 10 \end{cases}$

21) La diferencia entre dos números es igual al opuesto de 4. El segundo número es igual al triple del primero, aumentado en 12 unidades. ¿Cuáles son esos números? Plantee el sistema, resuelva y verifique el resultado obtenido.

22) ¿Cuál es el conjunto solución del siguiente sistema?

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ y = 3x + 5 \end{cases}$$

a) $S = \{(2; -1)\}$

b) $S = \{(-1; 2)\}$

c) $S = \{(1; 2)\}$

d) Ninguna de las respuestas anteriores.

23) Resuelva

a) Grafique $\begin{cases} y = x - 5 \\ y = 1 - 2x \end{cases}$ en el mismo par de ejes cartesianos

b) Identifique en la gráfica el punto de intersección de las rectas.

c) Obtenga el conjunto solución.

24) Plantee los sistemas de ecuaciones correspondientes a cada problema y resuélvalos:

a) El perímetro de un rectángulo es 30 centímetros y la base es el duplo de la altura, ¿cuáles son sus dimensiones?

b) La suma de dos números es 60. El primero es el triple del segundo, ¿cuáles son esos números?

25) Invente un problema que pueda ser traducido por siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

26) Dos hermanos tienen en conjunto \$1.000 pero el mayor recibió el cuádruple del dinero que recibió el hermano menor. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

27) Resuelva

- a) Para la recta $y = 3 - x$, indique la ordenada del origen, su conjunto de ceros y gráfiquela.
- b) Para la recta $y = 9 - 3x$, indique la ordenada del origen, su conjunto de ceros y gráfiquela en el mismo par de ejes que la recta anterior.
- c) Identifique en la gráfica el punto en el cual se cortan las dos rectas.
- d) Resuelva el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas.



UNIDAD II



FUNCIONES CUADRÁTICAS



PARA ANALIZAR Y RESPONDER

Todos los cuerpos que caen libremente hacia la Tierra tienen la misma aceleración *hacia abajo*, la aceleración de la gravedad. La distancia que recorren, en metros, es de aproximadamente 5 veces el cuadrado del tiempo de la caída (medido en segundos), en símbolos: $d = 5t^2$

- a) ¿Cuál es la variable independiente?
- b) ¿Y la dependiente?
- c) ¿Desde cuántos metros cayó un cuerpo que tardó un segundo en caer?
- d) ¿Y uno que tardó dos segundos en caer?
- e) ¿Y otro que tardó tres segundos en caer?

ANALICE ALGUNAS SOLUCIONES POSIBLES

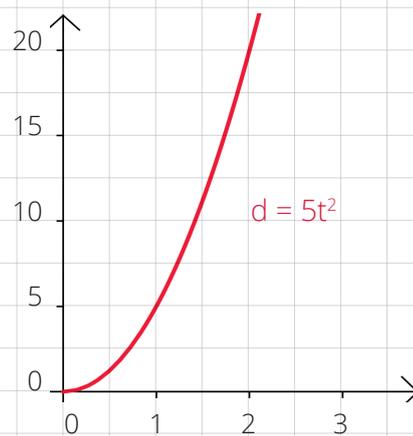
- a) La variable independiente es el tiempo medido en segundos.
- b) La variable dependiente es la distancia medida en metros.
- c) Si el cuerpo tardó un segundo en caer, entonces cayó desde una altura de 5 metros.
- d) Si el cuerpo tardó dos segundos: $d = 5 \cdot 2^2 = 20$.
- e) Si el cuerpo tardó tres segundos, entonces $d = 5 \cdot 3^2 = 45$.

FUNCIONES CUADRÁTICAS

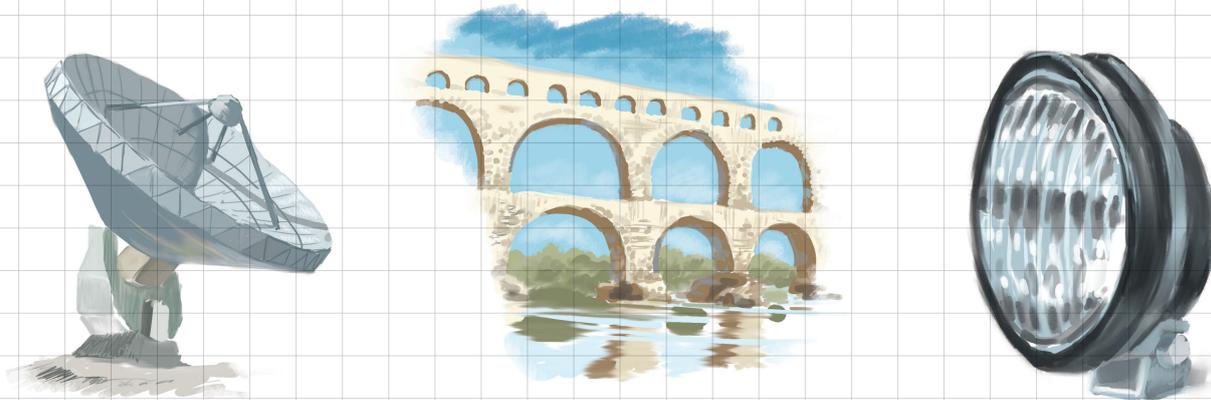
En esta Unidad trabajaremos con otro tipo de funciones que no son lineales como las anteriores. En el ejemplo anterior, las dos magnitudes que se relacionan en la función $d = 5t^2$ son las **variables**. La **distancia "d"** recorrida por el objeto depende del **tiempo "t"** transcurrido. En este caso la distancia es **función** del tiempo. Como la variable tiempo está elevada al cuadrado, diremos que **d** es una **función cuadrática**.

La tabla que representa la situación es la siguiente:

Tiempo (segundos)	Distancia (metros)
1	5
2	20
3	45



La gráfica de la función cuadrática recibe el nombre de **parábola**. La forma **parabólica** está presente en muchos objetos que nos rodean.



FÓRMULA DE LAS FUNCIONES CUADRÁTICAS

La función cuadrática se expresa con la fórmula $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ donde a es el coeficiente cuadrático, b el coeficiente lineal y c el término independiente. Este número c representa también la ordenada al origen. Los coeficientes a, b, c son números reales.

Destaquemos que a nunca puede ser 0 porque si a fuera 0, la función no sería cuadrática sino lineal como las que estudiamos anteriormente.

En cambio, observe que b o c podrían ser 0 y la función seguiría siendo cuadrática.

Los siguientes son ejemplos de fórmula de funciones cuadráticas:

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x^2 + 4 \\g(x) &= -3x^2 + 5x \\h(x) &= 2x^2 - 5x + 7\end{aligned}$$

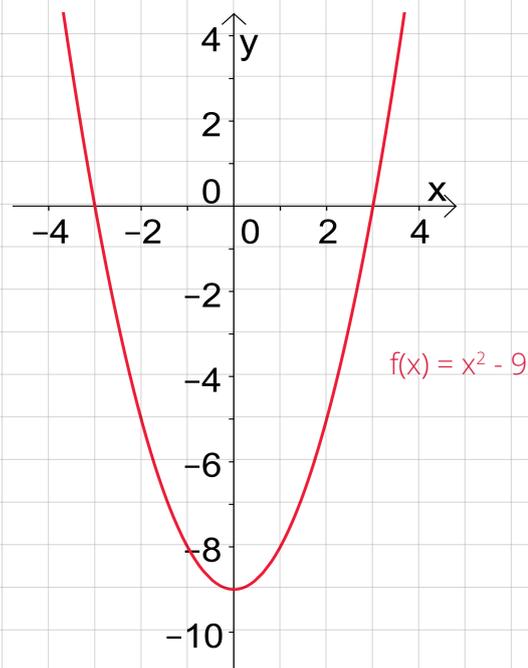
GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Para graficar $f(x) = x^2 - 9$ vamos a reemplazar "x" por algunos valores. Calculemos el valor numérico para -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4:

$$\begin{aligned}f(0) &= 0^2 - 9 = -9 \\f(1) &= 1^2 - 9 = -8 \\f(-2) &= (-2)^2 - 9 = -5 \\f(3) &= 3^2 - 9 = 0 \\f(-4) &= (-4)^2 - 9 = 5\end{aligned}$$

Así vamos obteniendo:

x	y = x ² - 9
-4	7
-3	0
-2	-5
-1	-8
0	-9
1	-8
2	-5
3	0
4	7



Observe que la gráfica de la parábola de una función cuadrática es simétrica respecto de un eje de simetría vertical (que es una recta). Algunas veces las parábolas son decrecientes y después crecientes, otras, por el contrario, primero crecen y luego decrecen.

En el primer caso alcanzan un valor mínimo y en el segundo, un valor máximo. Ese punto máximo o mínimo recibe el nombre de **vértice de la parábola**.

✘ ACTIVIDAD

1) Para la función cuadrática $f(x) = x^2 - 1$:

- Construya una tabla de valores para $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$.
- Grafique la función cuadrática aproximadamente a partir de los valores obtenidos.

2) Para la función cuadrática $f(x) = x^2 + 1$:

- Construya una tabla de valores para $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$.
- Grafique la función cuadrática aproximadamente a partir de los valores obtenidos.

ESTUDIO COMPLETO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

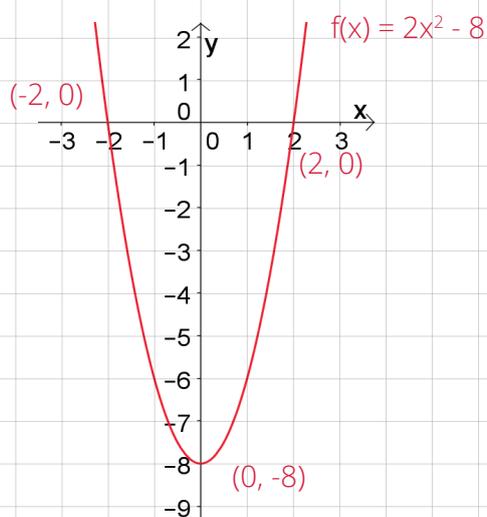
Para calcular los ceros o raíces de una función, la igualamos a 0 y despejamos:

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x^2 - 8 \\2x^2 - 8 &= 0 \\2x^2 &= 8 \\x^2 &= 4 \\x &= 2 \quad x = -2\end{aligned}$$

$C_0 = \{-2; 2\}$ se lee "conjunto de ceros o raíces". Son los valores de intersección entre la parábola y el eje horizontal $y = 0$ (eje x).

Para calcular la ordenada al origen en $y = 2x^2 - 8$ reemplazamos " x " por 0:
 $y = 2 \cdot 0^2 - 8 = -8$.

Para graficar la parábola a partir de las intersecciones con los ejes, en este caso ubicamos -2 y 2 en el eje horizontal, -8 en el eje vertical y trazamos la parábola.



El coeficiente " a " indica la concavidad de la parábola y también su abertura.
Si $a > 0$ la parábola tiene concavidad positiva, \cup el vértice es un mínimo
Si $a < 0$ la parábola tiene concavidad negativa, \cap el vértice es un máximo

Para determinar las coordenadas del **vértice**, calculamos la abscisa del vértice de la parábola. Si la función tiene raíces, es posible calcularla como el promedio entre sus ceros.

En el ejemplo, el promedio entre -2 y 2, por lo cual x_v (se lee x del vértice) es 0. Luego reemplazamos por ese valor para obtener y_v en la función $f(x) = 2 \cdot x^2 - 8$

$$y_v = f(x_v) = f(0) = 2 \cdot 0^2 - 8 = -8;$$

El vértice de la parábola es $V = (0; -8)$. Este punto es un mínimo.

Otra forma de calcular el vértice de la parábola cuya fórmula es $y = ax^2 + bx + c$, es con la siguiente fórmula:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

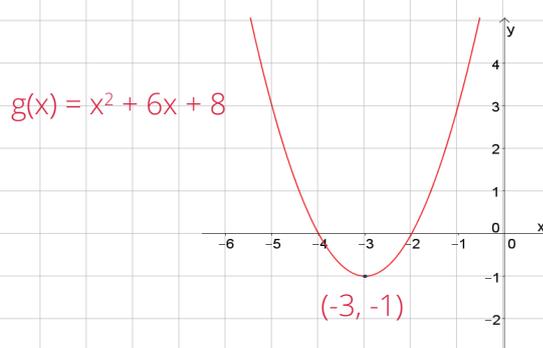
Consideremos un nuevo ejemplo:

$$g(x) = x^2 + 6x + 8$$

En dicha función es posible identificar los coeficientes $a = 1$ (el número que multiplica a x^2); $b = 6$ (el número que multiplica a x) y $c = 8$ (el término independiente, sin x). Por lo tanto usando la fórmula del vértice, $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot 1} = -3$. Luego reemplazamos para obtener y_v en la función $g(x) = x^2 + 6x + 8$

$$y_v = g(x_v) = g(-3) = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) + 8 = -1;$$

El vértice de la parábola es $V = (-3; -1)$. Este punto es un mínimo.



✘ ACTIVIDAD

3) Para la función cuadrática de fórmula $f(x) = x^2 - 8x + 12$:

- Identifique los coeficientes a , b y c .
- Calcule la ordenada del origen.
- Calcule el vértice.
- Analice la concavidad.

4) Para la función cuadrática de fórmula $f(x) = x^2 - 4$:

- Calcule los ceros o raíces.
- Calcule la ordenada del origen.
- Grafique la parábola.
- Indique el valor del término cuadrático y analice si la concavidad es positiva o negativa.
- Calcule el vértice de la función cuadrática y clasifique según sea máximo o mínimo.

5) Para la función cuadrática de fórmula $f(x) = -2x^2 + 16x - 30$

- Identifique los coeficientes a , b y c .
- Calcule la ordenada del origen.
- Calcule el vértice.
- Analice la concavidad.

6) Para la función cuadrática de fórmula $f(x) = 9 - x^2$:

- Calcule los ceros o raíces.
- Calcule la ordenada del origen.
- Grafique la parábola.
- Indique el valor del término cuadrático y analice si la concavidad es positiva o negativa.
- Calcule el vértice de la función cuadrática y clasifique según sea máximo o mínimo.

PARA ANALIZAR Y RESPONDER

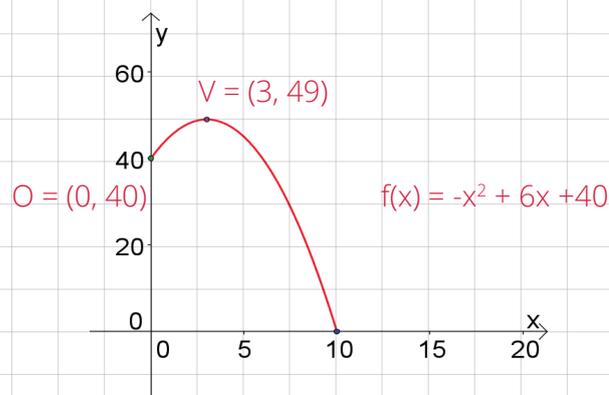
En el año 2010 se introdujeron 40 truchas en un lago de Esquel, provincia de Chubut. Al principio la población empezó a crecer rápidamente pero después de un tiempo decreció. El número de truchas a los "t" años está dado por:

$$N(t) = -1 \cdot t^2 + 6t + 40$$

- Grafique la función desde $t = 0$ hasta $t = 10$ años.
- ¿En qué año se extinguirá la población de truchas?
- ¿En qué año comenzará a decrecer la población?

ANALICE ALGUNAS SOLUCIONES POSIBLES

a)



Es importante mencionar que sólo se graficó la parábola para valores de tiempo positivos y hasta que la cantidad de truchas se extinguió.

- Según la gráfica, la población de truchas se extingue a los diez años, es decir en el año 2020 (observe que es una de las raíces).
- La población de truchas comenzó a decrecer a partir del vértice de la parábola, es decir, a los tres años desde que introdujeron las 40 truchas, en el año 2013.

✘ ACTIVIDAD

7) Un cohete de juguete se lanza desde el piso hacia arriba con un impulso inicial de 16 m/s y a medida que pasa el tiempo (t) alcanza una altura (H) expresada por la función $H(t) = 16t - 4t^2$

- ¿Cuál es la altura que alcanza el cohete a los tres segundos?
- Grafique la función a partir de una tabla para $t = 0; 1; 2; 3; 4$
- ¿Cuánto tiempo tardará el cohete en volver al piso?
- ¿En qué tiempo alcanza la altura máxima?
- ¿Y cuál es esa altura máxima alcanzada?

8) La distancia de frenado es la distancia que recorre un auto desde que el conductor pisa el freno hasta que el auto se detiene por completo. Esta distancia se obtiene con la siguiente fórmula donde "v" es la velocidad en km/h y "d" es la distancia de frenado en metros. Y sirve para velocidades de hasta 125 km/h.

$$d = v - 0,004 v^2$$

- Grafique la función a partir de una tabla para $v = 0; 50; 100; 120; 125$;
- ¿Cuál es la distancia de frenado para un auto que viaja por la autopista a 120 km/h?
- ¿Y para 100 km/h?
- ¿Cuál es la distancia máxima alcanzada?

9) Unos investigadores determinaron que la concentración de la sustancia de un medicamento en la sangre después de un tiempo está expresada por $C = 0,75t - 0,25t^2$ donde "C" es la concentración de la sustancia en mg/ml y "t" es el tiempo en hs. que transcurrió desde la aplicación.

- Grafique la función a partir de una tabla para $t = 0; 1; 2; 3$;
- ¿Cuánto tiempo tarda en desaparecer la sustancia de la sangre?
- ¿Cuál es la concentración de la sustancia a las dos horas?

ACTIVIDAD

INTEGRADORA

10) Para la función cuadrática de fórmula $f(x) = x^2 + 6x + 9$:

- Identifique los coeficientes a , b y c .
- Calcule la ordenada del origen.
- Calcule el vértice.
- Analice la concavidad.

11) Dada la siguiente función de fórmula $f(x) = 6x^2 - x$:

- Identifique los coeficientes a , b y c .
- Analice su concavidad.

12) Para la función cuadrática de fórmula $f(x) = 3x^2 - 3$:

- Calcule los ceros o raíces.
- Calcule la ordenada del origen.
- Grafique la parábola.
- Indique el valor del término cuadrático y analice si la concavidad es positiva o negativa.
- Calcule el vértice de la función cuadrática y clasifique según sea máximo o mínimo.

13) Se arroja una piedra desde el suelo y su altura h , en metros, viene dada por: $h(t) = -6t^2 + 18t$ siendo t el tiempo en segundos.

- ¿A qué altura se encuentra al segundo?
- ¿A qué altura se encuentra a los 2 segundos?
- ¿Qué ocurre a los 3 segundos?
- Calcule el vértice e interprete su resultado.

14) Para la función cuadrática de fórmula $f(x) = x^2 - 10x + 25$:

- a) Identifique los coeficientes a, b y c.
- b) Calcule la ordenada del origen.
- c) Calcule el vértice.
- d) Analice la concavidad.

15) El ingreso mensual de una empresa "I" está relacionado con el abono mensual de cada cliente, la función Ingreso es $I(x) = 4000x - 40x^2$ donde "I" es el ingreso en pesos y "x" el abono en pesos

- a) ¿Cuál es el ingreso para un abono de \$80 mensuales?
- b) ¿Y para un abono de \$90 mensuales?
- c) Calcule el vértice e interprete su resultado.

16) Para la función cuadrática de fórmula $y = 4 - x^2$

- a) Calcule los ceros o raíces.
- b) Calcule la ordenada del origen.
- c) Grafique la parábola.
- d) Indique el valor del término cuadrático y analice si la concavidad es positiva o negativa.
- e) Calcule el vértice de la función cuadrática y clasifique según sea máximo o mínimo.

17) Se arroja una pelota desde el suelo y la altura "h", en metros, viene dada por: $h(t) = -5t^2 + 10t$ siendo "t" el tiempo en segundos.

- a) ¿A qué altura se encuentra al segundo?
- b) ¿Qué ocurre a los 2 segundos?

18) Para la función cuadrática de fórmula $f(x) = 2x^2 - 2$:

- a) Calcule los ceros o raíces.
- b) Calcule la ordenada del origen.
- c) Grafique la parábola.
- d) Indique el valor del término cuadrático y analice si la concavidad es positiva o negativa.
- e) Calcule el vértice de la función cuadrática y clasifique según sea máximo o mínimo.

19) Dada la fórmula de la siguiente función: $f(x) = 2x^2 - x$:

- a) Identifique los coeficientes a, b y c.
- b) Analice su concavidad y calcule el vértice.

20) Para la función cuadrática de fórmula $y = 8 - 2x^2$:

- a) Calcule los ceros o raíces.
- b) Calcule la ordenada del origen.
- c) Grafique la parábola.
- d) Indique el valor del término cuadrático y analice si la concavidad es positiva o negativa.
- e) Calcule el vértice de la función cuadrática y clasifique según sea máximo o mínimo.

21) El ingreso semanal de un micro emprendimiento "I" está relacionado con las ventas semanales, la función Ingreso es $I(x) = 2000x - 20x^2$ donde "I" es el ingreso en pesos y "x" el número de unidades vendidas.

- a) ¿Cuál es el ingreso para 60 unidades?
- b) ¿Y para 90 unidades?
- c) ¿Cuántas unidades se vendieron si el ingreso fue de \$ 39.420?

22) Para la función cuadrática de fórmula $f(x) = 5x^2 - 5$:

- a) Calcule los ceros o raíces.
- b) Calcule la ordenada del origen.
- c) Grafique la parábola.
- d) Indique el valor del término cuadrático, analice si la concavidad es positiva o negativa.
- e) Calcule el vértice de la función cuadrática y clasifique según sea máximo o mínimo.

23) La eficacia de un medicamento está dada por la función $E(t) = -t^2 + 10t - 15$ donde "t" es el número de hs. que pasan desde su ingesta.

- a) Calcule la eficacia del medicamento a las 4 horas de su toma.
- b) ¿Y a las 7 horas de su toma?

24) Para la función cuadrática de fórmula $f(x) = 18 - 2x^2$:

- a) Calcule los ceros o raíces.
- b) Calcule la ordenada del origen.
- c) Grafique la parábola.
- d) Indique el valor del término cuadrático y analice si la concavidad es positiva o negativa.
- e) Calcule el vértice de la parábola de esta función cuadrática y clasifique según sea máximo o mínimo.

25) La concentración de una medicación en sangre está dada por $q(t) = -0,2t^2 + 0,8t + 2,3$ donde "t" es el tiempo en hs.

- a) ¿Qué concentración hay al inicio?
- b) ¿Qué concentración habrá a las 2 horas?

26) Para la función cuadrática de fórmula $f(x) = x^2 - 4x$:

- a) Identifique los coeficientes a, b y c.
- b) Calcule la ordenada del origen.
- c) Calcule el vértice.
- d) Analice la concavidad.

27) Dada la fórmula de la siguiente función: $f(x) = 5x^2 - 5x$:

- a) Identifique los coeficientes a, b y c.
- b) Analice su concavidad y el vértice.

28) Se arroja hacia arriba un avión de juguete desde el suelo. La altura "h", en metros, viene dada por $h(t) = -4t^2 + 12t$ siendo "t" el tiempo medido en segundos.

- a) ¿A qué altura se encontrará al segundo?
- b) ¿Qué ocurre a los 3 segundos?
- c) Calcule el vértice e interprete su resultado.



UNIDAD III



PROPORCIONALIDAD



PROPORCIONALIDAD NUMÉRICA

Una proporción es la igualdad entre 2 cocientes o 2 fracciones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Los valores b y c se llaman medios de la proporción y los valores a y d son los extremos.

“En toda proporción, el producto entre los extremos es igual al producto entre los medios”

En símbolos:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

PARA ANALIZAR Y RESPONDER

- a) Si en el mapa la distancia entre 2 ciudades está indicada con un segmento de 2 cm de longitud, ¿cuál es la distancia real sabiendo que 1 cm equivale a 100 km?
- b) Si una docena de huevos colorados cuesta \$18, ¿cuál es el precio de 8 huevos?
- c) Si 3 litros de soda cuestan \$20, ¿cuánto cuestan 15 litros de soda?

ANALICE ALGUNAS SOLUCIONES POSIBLES

a) Si cada cm representa 100 km, la distancia en el mapa es de 2 cm pero en la realidad es de 200 km (el doble).

b) Podemos calcularlo sin necesidad de averiguar cuánto sale un huevo, porque sabiendo que la tercera parte de la docena (que son 4 huevos) cuesta \$6, el doble de esos 4 huevos, es decir 8 huevos, cuestan \$12. Si lo escribimos como proporción, obtenemos $\frac{18}{12} = \frac{x}{8}$; si la resolvemos aplicando la propiedad: $18 \cdot 8 = x \cdot 12$, por lo tanto $x = \$12$, el precio de 8 huevos es \$12.

Otra forma es dividir $\$18 : 12 = \$1,5$ y obtenemos el costo de un huevo, por lo cual, el precio de 8 huevos es $8 \cdot 1,5 = \$12$

c) En este caso, podemos quintuplicar el precio obteniendo \$100 o armar la proporción $\frac{20}{3} = \frac{x}{15}$ y al resolverla se obtiene $20 \cdot 15 = 3 \cdot x$, y resulta $x = \$100$.

✘ ACTIVIDAD

1) Halle el valor de "x" en las siguientes proporciones numéricas y verifique:

$$\text{a) } \frac{x}{14} = \frac{3}{7}$$

$$\text{b) } \frac{x}{5} = \frac{8}{15}$$

PROPORCIONALIDAD ENTRE SEGMENTOS

Tales de Mileto, uno de los 7 sabios de Grecia, en el siglo VI a. de Cristo, en un día de sol y a partir de la sombra que generan los cuerpos, planteó la relación que existe entre la altura de los objetos y la longitud de las sombras que estos producen.

En uno de sus viajes a Egipto, aplicando la proporcionalidad de los segmentos, calculó la altura del Obelisco de Tutmosis con sólo medir la longitud de un bastón, su sombra y la sombra del Obelisco.

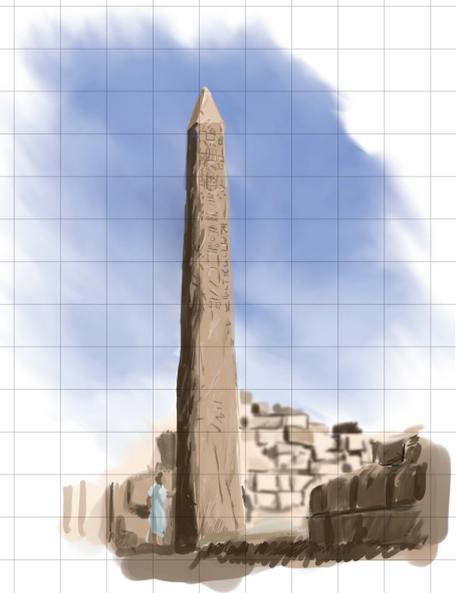
En el proceso de medición indirecta el bastón y su sombra medían 2 y 3 codos respectivamente y la sombra del obelisco medía 75 codos. Ambos triángulos son semejantes pues sus ángulos son iguales y sus lados, proporcionales:

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{75}$$

Aplicamos la propiedad de las proporciones, por lo tanto:

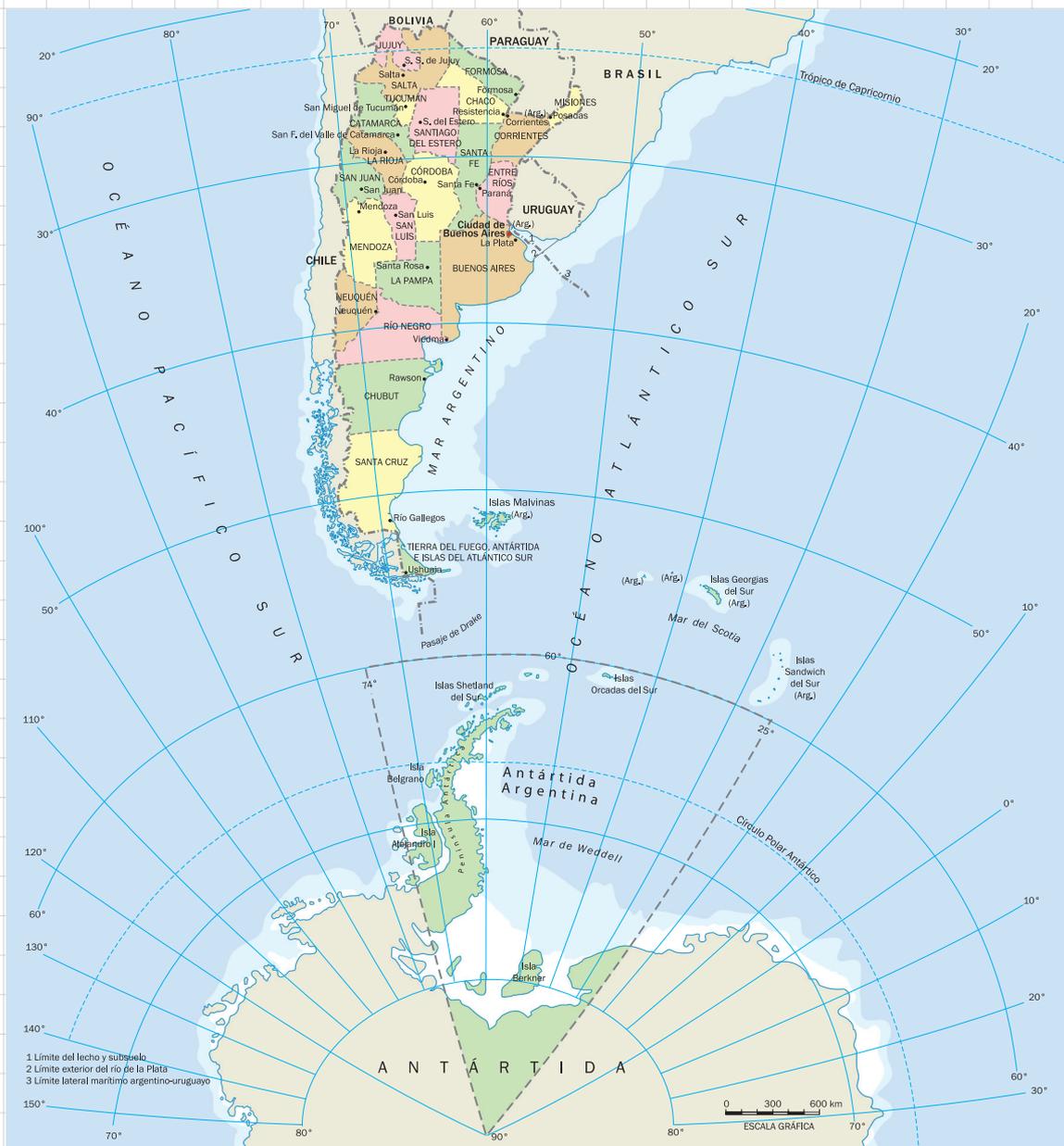
$$\begin{aligned} 2 \cdot 75 &= 3 \cdot x \\ 150 &= 3x \\ x &= 50 \end{aligned}$$

Tales midió en forma indirecta la altura del Obelisco de Tutmosis y obtuvo una medida de 50 codos. En la antigüedad se utilizaban partes del cuerpo como el pie, el palmo y el codo para medir longitudes. Se considera que el codo equivale aproximadamente a 42 cm. Por lo cual, el Obelisco de Tutmosis aproximadamente mide 2100 cm o 21 metros.



ESCALAS

Para dibujar objetos muy grandes o demasiado pequeños tenemos que aumentar o reducir, respectivamente, las medidas que los representan. En esos casos el dibujo, el plano, el croquis o el mapa están hechos a escala. Toda escala es un cociente entre 2 números donde el primero indica el tamaño del dibujo, mientras que el segundo indica el tamaño real del objeto.

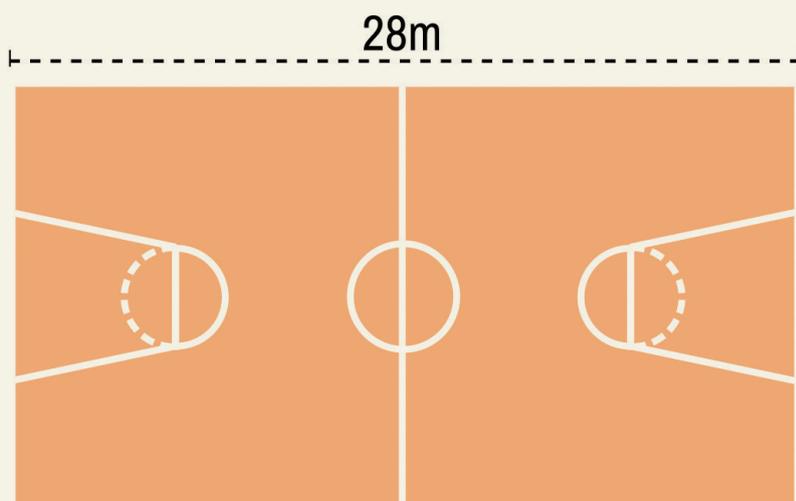


Escala = $\frac{l}{L}$ donde l es la "longitud representada en el plano" y L es la "Longitud real".

En un mapa de Argentina se indica que la escala es 1cm: 100km. Si la distancia real entre las ciudades de Buenos Aires y Mendoza es aproximadamente 1100 km, ¿qué distancia tendrán en el mapa? ¿A qué distancia real están 2 ciudades que en el mapa aparecen a 3,5 cm?

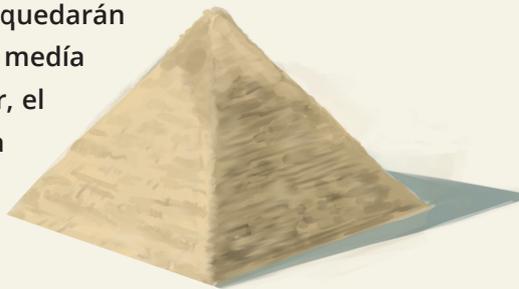
✘ ACTIVIDAD

3) Se construyó la maqueta de un pueblo con la plaza, parques, casas, árboles de manera que lo que en el pueblo mide 100 metros, en la maqueta mida 5 centímetros. Si la cancha de básquet tiene un largo real de 28 m, ¿con cuántos centímetros se representa en la maqueta?



4) Un árbol arroja una sombra de 7 m. En ese mismo momento, un pino joven de 1,6 m de altura proyecta una sombra de 70 cm, ¿cuál es la altura del árbol grande?

5) Calcule la altura de la pirámide de Keops considerando que Tales de Mileto la midió en forma indirecta de la siguiente forma: Tales clavó su bastón verticalmente en el suelo de arena, esperó a que las sombras de la pirámide y del bastón quedarán alineadas y razonó que si el bastón medía 1 m y su sombra era de 3 m, es decir, el triple; la sombra que proyectaba la pirámide era de 438 m entonces la pirámide medía la tercera parte de su sombra.

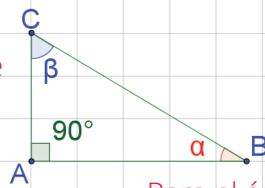


TRIGONOMETRÍA

La trigonometría es la rama de la matemática que estudia las relaciones entre lados y ángulos de un triángulo rectángulo. Surgió por necesidades astronómicas, cartográficas y de navegación.

TRIANGULO RECTÁNGULO

Para el ángulo β
 \overline{AB} = cateto opuesto
 \overline{AC} = cateto adyacente
 \overline{BC} = hipotenusa



Para el ángulo α
 \overline{AB} = cateto adyacente
 \overline{AC} = cateto opuesto
 \overline{BC} = hipotenusa

Supongamos que apoyamos una escalera de 3,6 m de largo en una pared de forma que ella determina con el suelo un ángulo de 30° . ¿Cómo te parece que podríamos calcular a qué altura de la pared está apoyada la escalera?



El triángulo rectángulo que se formó es semejante a cualquier otro triángulo rectángulo que tenga un ángulo de 30° por lo que si supieramos las relaciones entre sus lados, podríamos calcular la altura de la pared. A estas relaciones las llamamos razones trigonométricas.

Las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo son el seno, el coseno y la tangente. Con las medidas de los lados de un triángulo rectángulo se pueden plantear cocientes que reciben distintos nombres: seno, coseno y tangente.

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos}(\alpha) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tan}(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Volviendo entonces a cómo resolver el problema de la escalera...

Si $\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ entonces $\text{sen}(30^\circ) = \frac{x}{3,60 \text{ m}}$

$$3,60 \text{ m} \cdot \text{sen } 30^\circ = x$$

$$3,60 \text{ m} \cdot 0,5 = x$$

$$1,80 \text{ m} = x$$



Entonces la escalera está apoyada a 1,80 m de altura.

✘ ACTIVIDAD

6) Obtenga los valores de las razones trigonométricas utilizando una calculadora científica:

- a) $\tan 70^\circ \approx$
- b) $\tan 45^\circ \approx$
- c) $\tan \alpha = 1,73$; obtenga α
- d) $\tan \beta = 19$; obtenga β
- e) $\text{sen } 30^\circ =$
- f) $\text{cos } 60^\circ =$

7) En un rectángulo de 800 cm de largo y 720 cm de ancho, ¿qué ángulo forma la diagonal con el lado mayor?

8) Uno de los cables con los que se fijó una torre metálica del tendido eléctrico forma con el piso un ángulo de 30° . Si la distancia entre el pie de la torre y el punto de fijación es de 30 m.

- a) ¿Cuál es la altura de la torre?
- b) ¿Y la longitud del cable?

9) Calcule la sombra que proyecta una persona cuya altura es de 180 cm cuando la inclinación del Sol determina con la horizontal un ángulo de 31° .



10) En un hogar la escalera tiene escalones de 25 cm de pedada (ancho) y 18 cm de alzada (alto). Obtenga el ángulo de inclinación de la escalera.

11) Un electricista apoya una escalera sobre una pared. Para no resbalarse, el pie de la escalera debe estar a 1,5 m de la pared y ésta debe formar un ángulo de 50° con el piso. Calcule la longitud de la escalera.

RECOMENDACIONES

Si en el Centro Educativo FinEs disponen de un reproductor de DVD, le sugerimos ver con el resto de sus compañeros y acompañados por su tutor el siguiente video:

05 "Escalas, mapas, planos y porcentajes" en Geometría y medida.

También lo pueden consultar en la siguiente página:
<http://fines.educacion.gov.ar/modulos/matematica>

ACTIVIDAD

INTEGRADORA

12) La réplica de la Ferrari 1958 "200" Testarossa mide 23,5 cm de largo y 9,5 cm de ancho. Si la escala que aparece en el chasis es 1:18, ¿cuáles son sus medidas reales?

13) La sombra de un edificio en un determinado momento del día mide 192 m. Si en el mismo instante la sombra de un semáforo de 2,5 m de altura mide 1,5 m, ¿cuál es la altura del edificio?

14) A un incendio producido en un hospital acude la unidad de bomberos con una escalera de 32 m de longitud que tiene 80 escalones distribuidos uniformemente. Al apoyar la escalera sobre el frente del hospital se observa que el primer escalón se encuentra a 30 cm del suelo, ¿qué altura del hospital alcanzará la escalera?

15) Resuelva

- a) Calcule la base de un triángulo isósceles cuya altura mide 8 mm y el ángulo opuesto a la base es de 40° .
- b) Obtenga el perímetro del triángulo.

16) Una rampa de 10 m de longitud tiene una altura de 2,5 m. ¿Cuál es el ángulo de elevación?

17) Calcule el valor de "x" en las siguientes proporciones numéricas:

a) $\frac{5}{x} = 25$

b) $\frac{4}{8-x} = \frac{3}{4}$

c) $\frac{x}{3x-4} = 3$

d) $\frac{1}{x} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

18) En un triángulo rectángulo la altura mide 6 cm y la base mide 8 cm.

- a) Calcule su hipotenusa
- b) Calcule el perímetro y la superficie

19) Obtenga los valores de las siguientes razones trigonométricas utilizando la tabla o una calculadora científica (Consulte con su docente sobre el sentido de calcular relaciones trigonométricas en ángulos mayores que 90°):

- a) $\tan 80^\circ \approx$
- b) $\tan 30^\circ \approx$
- c) $\tan \alpha = 0,5$; obtenga α
- d) $\tan \beta = 1,5$; obtenga β
- e) $\sin 60^\circ =$
- f) $\cos 30^\circ =$
- g) $\tan 89^\circ \approx$
- h) $\tan 269^\circ \approx$
- i) $\tan \alpha = 3$; obtenga α
- j) $\tan \beta = 4$; obtenga β
- k) $\sin 150^\circ =$
- l) $\cos 30^\circ =$
- m) $\tan 135^\circ \approx$
- n) $\tan 315^\circ \approx$
- o) $\tan \alpha = 1$; obtenga α
- p) $\tan \beta = 2$; obtenga β
- q) $\sin 130^\circ =$
- r) $\cos 50^\circ =$

20) En un mapa de la provincia de Salta con escala $E = 1 : 1.000.000$; 1 cm representa: $1.000.000 \text{ cm} = 10.000 \text{ m} = 10 \text{ km}$ reales.

- a) Si la distancia real entre las ciudades de Iruya y Cafayate es de aproximadamente 500 km, ¿a cuántos cm están en el mapa?
- b) ¿A qué distancia real están 2 ciudades que en el mapa aparecen a 2 cm?

21) En un rectángulo la base mide 8 cm y la altura es tres cuartos de la base.

- a) Calcule su altura.
- b) Calcule su diagonal.

22) En un mapa de la provincia de Misiones con escala $E = 1 : 1.000.000$; 1 cm representa: $1.000.000 \text{ cm} = 100 \text{ 00 m} = 10 \text{ km}$ reales.

- a) Si la distancia real entre las ciudades de Puerto Iguazú y Posadas es de aproximadamente 300 km, ¿qué distancia tendrán en el mapa?
- b) ¿A qué distancia real están dos ciudades que en el mapa aparecen a 3 cm?

23) En un triángulo isósceles la altura mide 3 cm y la base mide 8 cm. Calcule el perímetro y la superficie.

24) En un triángulo rectángulo la base mide 12 cm y la altura mide 5 cm.

- a) Calcule la medida de su hipotenusa.
- b) Calcule el perímetro y el área del triángulo.

25) En un rectángulo la base mide 12 cm y la altura mide 5 cm.

- a) Calcule la diagonal del rectángulo.
- b) Calcule su perímetro y su superficie.



UNIDAD IV

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA



En sus orígenes la estadística se limitaba a efectuar recuentos o censos de habitantes, soldados, viviendas, animales, alimentos, cosechas, etc. Esta información era necesaria para que los jefes de Estado pudieran planificar estrategias bélicas, cobrar impuestos y tener mejor conocimiento de sus dominios. Más recientemente, en el siglo XIX, la estadística fue bautizada en Alemania con su nombre actual que significa "Ciencia de los negocios del Estado".

PARA ANALIZAR Y RESPONDER

a) Durante las elecciones presidenciales se identificaron algunas mesas electorales en particular. En ellas los resultados de la elección anterior fueron casi idénticos a los del total del país. ¿Para qué se identifican estas mesas electorales? ¿Por qué cree que le pueden servir esos datos a una consultora que realiza encuestas?

b) Las publicidades están orientadas a influir sobre un público específico. Los oferentes de los productos compran espacios publicitarios en radios, diarios, revistas y televisión pero deben decidir en cuáles lo van a hacer. ¿Qué datos de las personas a las cuáles está destinada la pauta publicitaria se podrían analizar para tomar esa decisión?

c) El siguiente gráfico muestra la cantidad de hijos que posee un grupo de familias. ¿Cuántas familias tienen 3 hijos? ¿Cuál es el número de hijos más común?



ANALICE ALGUNAS SOLUCIONES POSIBLES

a) Se puede pensar que las mesas electorales que arrojaron un resultado casi idéntico a los del total del país son mesas representativas de toda la población (aunque habría que analizar si están formadas por personas tan diversas). Sobre el padrón de estas mesas electorales se realizan encuestas a “boca de urna” y de ellas se infieren los resultados totales finales. A estas mesas se las denomina “mesas testigo”.

b) Los oferentes de los productos contratan empresas que analizan variables como edad, género, estado civil, nivel de escolaridad, nivel de educación máximo alcanzado, preferencias deportivas, artísticas, musicales; para asesorarse y comprar espacios publicitarios en determinados programas de radio y/o televisión que están destinados al público que a ellos les interesa.

c) 150 familias tienen 3 hijos. En las familias encuestadas el número más común de hijos es 2.

LA ESTADÍSTICA

Cada día nos enfrentamos con una gran cantidad de información estadística que abarca distintos temas: desde la educación, los deportes, la política, el clima y la economía hasta los avisos publicitarios.

A los integrantes de una muestra se los elegirá en forma azarosa o aleatoria de manera que todos los integrantes de la población tengan la misma oportunidad de ser seleccionados. A los objetos de interés de un estudio se los denomina unidades muestrales. Las unidades de la muestra pueden ser tornillos, ciudades, personas, lamparitas. Sobre esas unidades se analizan características que son las variables, como pueden ser la longitud de un tornillo, el clima de una ciudad, la edad de las personas o la duración o vida útil de una lamparita.

Las variables pueden ser cuantitativas (o numéricas). Por ejemplo: edad, estatura, peso, número de hijos, tasa de mortalidad materna. También pueden ser cualitativas, por ejemplo: género, estado civil, nacionalidad, grupo sanguíneo, máximo nivel de escolaridad alcanzado.

✘ ACTIVIDAD

1) Indique si las siguientes variables son cuantitativas o cualitativas:

- a) Números de hijos.
- b) Peso del bebé.
- c) Género.
- d) Salario en pesos.
- e) Estado civil.
- f) Cantidad de celulares a mi nombre.

2) En cada una de las siguientes situaciones indique cuál es la unidad muestral, la variable y la población. Cuando corresponda, identifique el tamaño de la muestra.

- a) Un lote de arandelas debe tener un diámetro promedio que se encuentre entre 1,95 cm y 2,05 cm para cumplir con las especificaciones de aceptación impuestas por un comprador. Sin embargo, un inspector selecciona 100 arandelas del lote y obtiene un promedio de 1,90 cm de diámetro. Este valor se encuentra fuera de las especificaciones, por lo que el lote es rechazado.
- b) En el año 2001, el 50 % de los hogares de la Argentina tenían heladera con freezer de acuerdo con los valores censales del Anuario Estadístico de la República Argentina.
- c) En el año 2009, el precio promedio de los autos modelo 2002 era de \$21.880. Este dato se obtuvo en base a la venta de 300 autos.

RECOPIACIÓN Y ORGANIZACIÓN DE DATOS

La distribución de una variable nos muestra cuáles son los valores que puede tomar y su frecuencia, es decir, cuántas veces se repite cada uno de los valores.

Para analizar las variables, en general se utilizan cantidades, proporciones y porcentajes.

En la tabla de mortalidad materna del Ministerio de Salud de la Nación (DEIS - Dirección de Estadísticas e Información de Salud. Estadísticas vitales. Información básica – año 2012) se registran las tasas del total del país y por jurisdicción. Éstas se obtienen proporcionalmente con la intención de representar el número de muertes maternas registradas cada 10.000 nacidos vivos.

El uso de tasas facilita la comparación. Por ejemplo, la tasa de La Rioja es mayor que la de San Luis. Este hecho se puede interpretar como la existencia de una mayor mortalidad materna en La Rioja, más allá de la comparación entre cantidades de muertes.

TASA DE MORTALIDAD MATERNA POR 10.000 NACIDOS VIVOS SEGÚN JURISDICCIÓN DE RESIDENCIA DE LAS FALLECIDAS, POR AÑO DE REGISTRO - REPÚBLICA ARGENTINA - AÑOS 1990 A 2012

JURISDICCIÓN DE RESIDENCIA	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
REPÚBLICA ARGENTINA	4,6	4,4	4,0	3,9	4,8	4,4	4,0	5,5	4,4	4,0	3,5
Ciudad Aut. de Buenos Aires	1,4	1,2	2,0	0,7	1,8	3,3	0,9	1,8	0,9	1,3	1,6
Buenos Aires	3,2	2,5	2,8	2,7	3,8	3,7	3,2	4,0	4,4	3,2	3,0
Catamarca	6,2	22,5	-	6,9	4,4	7,2	4,2	16,0	1,5	7,6	3,2
Córdoba	2,9	1,4	2,6	2,5	2,8	1,5	3,4	7,2	4,8	1,9	1,6
Corrientes	7,2	7,5	10,4	9,6	4,8	4,7	6,0	4,9	5,9	5,3	6,1
Chaco	7,8	8,1	7,0	5,2	12,8	6,3	8,2	9,7	7,5	8,6	6,8
Chubut	1,3	8,6	1,2	2,3	6,7	2,2	5,1	4,0	3,0	5,1	5,2
Entre Ríos	1,8	6,3	2,6	4,1	6,6	3,3	4,2	9,0	3,1	5,4	3,2
Formosa	16,6	13,5	11,1	16,4	10,7	13,3	11,5	15,0	16,2	12,3	15,0
Jujuy	10,9	15,5	13,1	8,5	16,5	4,8	10,0	8,3	3,7	11,5	7,7
La Pampa	5,7	5,2	-	1,8	3,7	11,2	7,3	3,6	7,2	7,4	3,7
La Rioja	11,1	16,9	13,6	15,0	9,6	13,0	4,6	8,0	11,4	6,3	1,6
Mendoza	7,2	3,8	3,9	4,8	3,4	3,9	2,6	2,6	4,4	4,7	3,6
Misiones*	4,6	6,2	6,7	6,8	12,5	8,3	7,6	9,3	8,1	8,7	3,5
Neuquén	-	5,1	3,9	5,8	1,8	5,4	2,6	5,2	3,3	2,7	1,8
Río Negro	4,5	1,9	2,8	1,8	1,8	3,6	2,5	1,7	0,8	1,7	4,2
Salta	6,9	6,9	4,4	5,7	4,0	7,3	6,1	8,4	5,8	3,9	4,5
San Juan	6,1	4,9	4,7	3,5	6,4	7,0	0,7	6,2	4,2	4,2	2,1
San Luis	8,4	8,2	4,6	2,5	7,1	4,8	2,4	9,8	3,8	3,9	2,6
Santa Cruz	2,4	11,1	-	2,0	3,9	1,9	1,8	5,2	3,3	-	3,4
Santa Fe	4,9	3,5	3,6	3,1	4,0	3,2	3,3	7,1	2,6	3,0	3,0
Santiago del Estero	6,8	5,5	7,3	5,7	4,1	4,2	7,9	5,8	1,7	5,5	3,1
Túcumán	5,3	7,3	4,7	3,5	6,8	6,6	4,1	3,9	3,0	3,7	4,5
Tierra del Fuego	-	4,4	4,6	8,4	-	-	3,8	3,8	-	11,8	-

(-) No se registraron muertes maternas.

* Varios meses después de la difusión de las Estadísticas Vitales 2011, la provincia de Misiones envió una nueva base de datos de nacidos vivos.

<http://www.deis.gov.ar/Publicaciones/Archivos/Serie5Nro56.pdf>

En el censo de la población de la República Argentina del año 2010 (INDEC - Instituto Nacional de Estadísticas y Censos) una de las preguntas se refería a la vivienda propia. Esta tabla corresponde a los

datos obtenidos de las respuestas a esa pregunta. En la primer columna de la tabla se presentan los nombres de las jurisdicciones mientras que en la segunda la distribución se expresa en **porcentajes** pues para analizar algunas cuestiones suele ser más sencillo pensar en porcentajes y en la tercera se muestra la distribución de la variable que se expresa en **cantidades** con el encabezamiento indicando "Total de hogares que disponen de vivienda propia". Por ejemplo, es más útil pensar que el 86,2 % de los hogares de Santiago del Estero disponen de vivienda propia que decir que 188.045 hogares tienen vivienda propia, si lo que queremos es diferenciar cuánto representa del total de los hogares.

Jurisdicción	Hogares que disponen de vivienda propia %	Total de hogares que disponen de vivienda propia	Hogares propietarios de la vivienda y el terreno	Hogares propietarios de la vivienda solamente
Santiago del Estero	86,2	188.045	174.177	13.868
Catamarca	81,7	778.469	76.916	1.553
Chaco	77,7	224.060	200.617	23.443
Tucumán	77,7	286.306	259.720	26.586
Misiones	76,9	232.822	204.876	27.946
La Rioja	76,8	70.008	69.060	948
Formosa	76,3	107.049	95.163	11.886
Corrientes	74,7	200.020	176.138	23.882
Buenos Aires	74,5	3.570.314	3.382.869	187.445
Entre Ríos	73,6	276.244	256.995	19.249
Santa Fe	73,2	749.418	707.444	41.974
Salta	72,4	216.978	197.094	19.884
Jujuy	72,1	125.988	117.589	8.399
La Pampa	72,1	77.597	76.615	982
San Luis	71,7	90.969	89.378	1.591
Neuquén	68,5	116.515	110.311	6.204
San Juan	68,4	121.214	116.649	4.565
Río Negro	67,9	135.298	128.043	7.255
Chubut	67,5	106.103	100.387	5.716
Córdoba	67,0	691.612	671.638	19.974
Tierra del Fuego, Antártida e islas del Atlántico Sur	65,6	25.545	21.703	3.842
Mendoza	64,7	320.380	309.626	10.754
Ciudad Autónoma de Buenos Aires	62,5	718.743	648.958	69.785
Santa Cruz	61,4	50.225	48.327	1.898

Nota: las Islas Malvinas, Georgias del Sur, Sándwich del Sur y los espacios marítimos circundantes forman parte integrante del territorio nacional argentino. Debido a que dichos territorios se encuentran sometidos a la ocupación ilegal del REINO UNIDO DE GRAN BRETAÑA e IRLANDA DEL NORTE, la REPÚBLICA ARGENTINA se vio impedida de llevar a cabo el Censo 2010 en esa área.

En el año 2014 el Plan Conectar Igualdad, que trabaja en la inclusión digital educativa, completó la entrega de netbooks a la totalidad de los estudiantes y docentes de escuelas secundarias públicas de todo el país.

En la tabla se presenta la distribución de netbooks en cada una de las provincias argentinas. La columna "cantidad de netbooks" muestra la frecuencia de cada provincia, es decir, la cantidad de computadoras entregadas en cada provincia. La suma de las frecuencias de la segunda columna da como resultado la cantidad total de netbooks entregadas: 4.705.613.

La frecuencia relativa es el cociente entre la frecuencia absoluta y la cantidad total de datos. Su suma siempre es 1. Cuando las frecuencias relativas están expresadas en porcentaje, la suma es 100, como vemos en la tercera columna de la tabla, en la cual se puede leer por ejemplo que el 6,49 % de las netbooks entregadas se repartieron en la provincia de Córdoba.

Provincia	Cantidad de Netbooks entregadas	Porcentaje %
Buenos Aires	1.739.294	36,96
CABA	188.606	4,01
Catamarca	73.276	1,56
Chaco	172.044	3,66
Chubut	84.958	1,81
Córdoba	305.293	6,49
Corrientes	156.103	3,32
Entre Ríos	168.374	3,58
Formosa	100.698	2,14
Jujuy	116.972	2,49
La Pampa	50.804	1,08
La Rioja	48.571	1,03
Mendoza	200.393	4,26
Misiones	136.411	2,90
Neuquén	97.502	2,07
Río Negro	87.769	1,87
Salta	183.303	3,90
San Juan	89.883	1,91
San Luis	68.655	1,46
Santa Cruz	39.194	0,83
Santa Fé	277.432	5,90
Sgo. del Estero	94.622	2,01
Tierra del Fuego	20.399	0,43
Tucumán	205.057	4,36
Total	4.705.613	100

ANÁLISIS DE LAS VARIABLES CUANTITATIVAS DISCRETAS

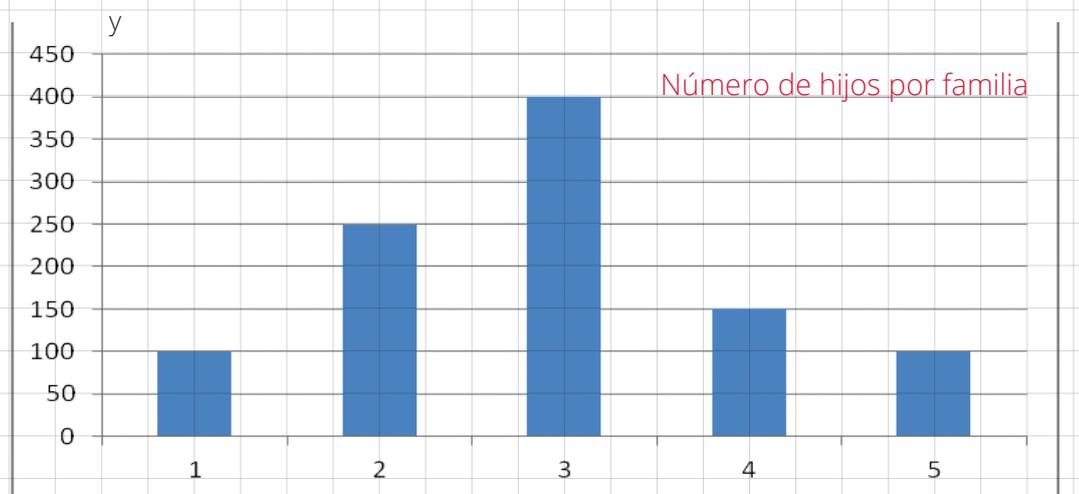
Una variable numérica es discreta cuando únicamente puede tomar valores enteros, es decir cuando no admite valores decimales.

La variable de estudio “x: cantidad de hijos” es una variable discreta pues no admite valores decimales (no se puede tener un hijo y medio). Puede tomar los valores 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7;... pero nunca valores como 3,67 o 0,1.

Los datos de la variable se pueden organizar en una tabla. En este caso, los datos fueron obtenidos mediante una encuesta realizada a 1.000 familias.

Cantidad de hijos por familia			
Cantidad de hijos	Frecuencia	Frecuencia relativa	Porcentaje
1	100	100/1000	10 %
2	250	250/1000	25 %
3	400	400/1000	40%
4	150	150/1000	15%
5	100	100/1000	10%
Total	1000	1	100%

Para representar gráficamente la distribución de los datos correspondientes a una **variable numérica discreta** se utiliza un gráfico de barras.



PARA ANALIZAR Y RESPONDER

- ¿Cuál es el número típico o más habitual de la muestra?
- ¿Qué porcentaje de familias tienen 2 hijos?
- ¿Y de familias que tienen 5 hijos?
- ¿Qué porcentaje de familias tienen más de 2 hijos?

ANALICE ALGUNAS SOLUCIONES POSIBLES

- a) La respuesta mas habitual de la muestra es 3 (se da en 400 casos).
- b) Como indica la tabla, el 25% de las familias de la muestra tienen dos hijos.
- c) Un 10% del total tienen cinco hijos.
- d) El 65% de la muestra tiene más de dos hijos.

ANÁLISIS DE LAS VARIABLES CUANTITATIVAS CONTINUAS

Las variables numéricas **continuas** son aquellas que admiten todos los valores numéricos posibles. A diferencia de las discretas, las variables continuas sí admiten números decimales.

La **variable** de estudio “x: distancia en km” es una variable continua. Como es posible recorrer una distancia de 13,80 km esta variable debe admitir valores decimales.

Los datos de la variable se pueden organizar en una tabla, de manera que representen la información que se obtuvo.

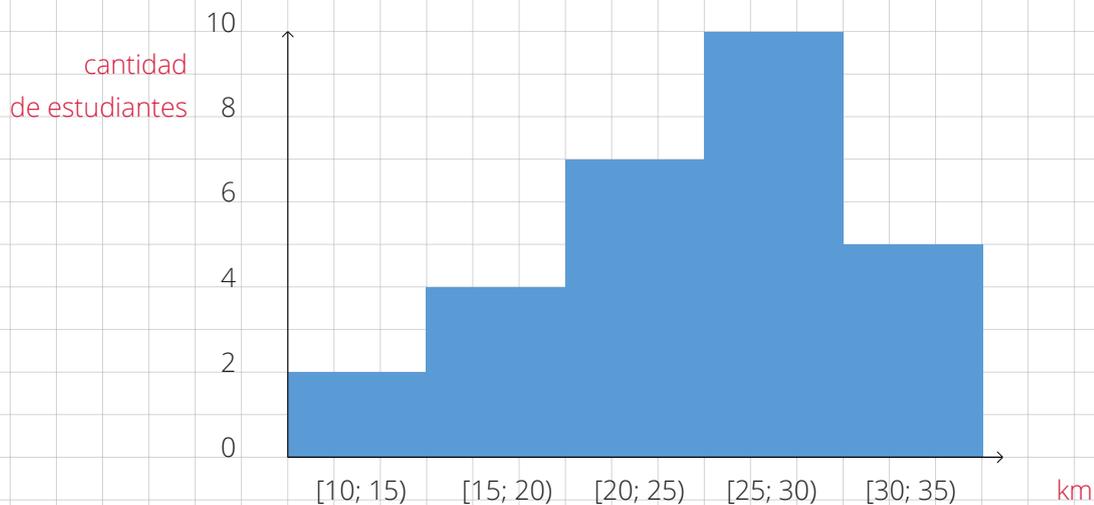
Se realizó una encuesta a 28 estudiantes, en la encuesta los estudiantes informaron acerca de las distancias de su hogar al Centro Educativo FinEs:

12,20 - 20 - 25 - 30,50 - 31,75 - 25 - 20 - 14,60 - 15,30 - 21 - 22,80 - 15 - 27 - 32,40
19 - 24 - 24,10 - 27 - 29 - 28,50 - 28 - 27,10 - 26 - 32,30 - 18,10 - 26,40 - 23 - 33,80

Se decidió agrupar las distancias en intervalos de cinco kilómetros c/u para poder construir la siguiente tabla de frecuencias:

Distancia en km	
x (kilómetros)	f (Cantidad de estudiantes)
[10; 15)	2
[15; 20)	4
[20; 25)	7
[25; 30)	10
[30; 35)	5
Total	28

Cuando la variable en estudio está agrupada en **intervalos**, el gráfico apropiado para representarla es el **histograma** que consiste en una serie de rectángulos consecutivos.



PARA ANALIZAR Y RESPONDER

- ¿Cuántos estudiantes viven a una distancia entre 10 y 15 km del Centro Educativo FinEs?
- ¿Entre qué valores se encuentran las distancias que recorren los estudiantes más alejados?
- ¿Qué porcentaje de los estudiantes recorre entre 20 y 30 kilómetros para llegar al Centro Educativo FinEs?
- ¿Qué porcentaje se encuentra a menos de 20 km del Centro Educativo FinEs?

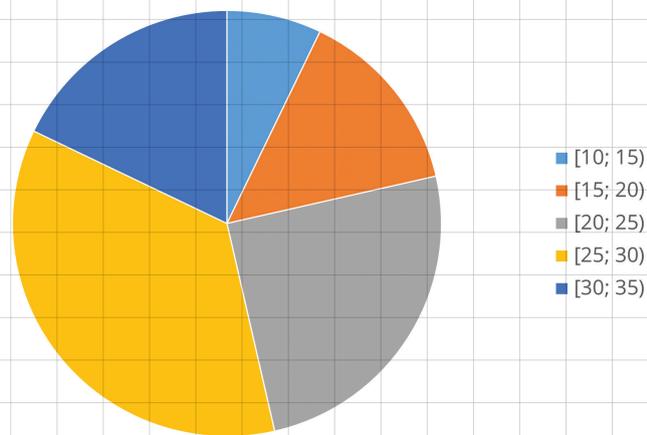
ANALICE ALGUNAS SOLUCIONES POSIBLES

- Dos estudiantes viven entre 10 y 15 km de la sede.
- Entre 30 y 35 km.
- Son 17 estudiantes de un total de 28, es decir, el 60,71%.
- Son 6 estudiantes de un total de 28, es decir el 21,42%.

Otro tipo de gráfico que se emplea en estadística es el *circular*, que puede utilizarse para representar cualquier tipo de variable de estudio.

Para confeccionar el gráfico circular se deben establecer relaciones proporcionales entre las cantidades a representar y los sectores circulares que las representan. El total de la muestra se relaciona siempre con 360° que es el ángulo que corresponde al total del círculo.

Por ejemplo, en el caso con el que estamos trabajando, si a los 28 alumnos les corresponden los 360° del total a los 4 alumnos del intervalo [15;20) les corresponden 51° del gráfico.



$$\frac{28}{4} = \frac{360^\circ}{\alpha}$$

$$\alpha = 4 \cdot 360^\circ : 28$$

$$\alpha \approx 51^\circ$$

x Km	f (cantidad de estudiantes)	x
[10; 15)	2	26°
[15; 20)	4	51°
[20; 25)	7	90°
[25; 30)	10	129°
[30; 35)	5	64°
Total	28	360°

✘ ACTIVIDAD

3) Una casa de deportes vendió, durante los últimos 3 meses, 45.000 pares de zapatillas para hombres. La siguiente tabla muestra la distribución de las ventas según el talle de las zapatillas:

x (n° de calzado)	f (cantidad de zapatillas)
35	100
36	600
37	2.000
38	9.100
39	17.200
40	11.700
41	3.500
42	700
43	100

El administrador decide comprarle al mayorista una nueva partida de 12.000 pares de zapatillas para la próxima temporada. ¿Le convendría que, de los 12.000 pares, 7.000 sean número 38? ¿Por qué?

4) Con el objetivo de realizar una investigación del ausentismo en el Centro Educativo FinEs se observaron las inasistencias de 20 estudiantes durante 1 mes y se obtuvieron los siguientes valores: 1; 3; 2; 5; 1; 0; 0; 1; 1; 2; 2; 1; 2; 2; 1; 1; 2; 2; 2; 4.

- Ordene los datos y construya una tabla sin agrupar en intervalos.
- Grafique la distribución.
- Calcule el porcentaje de estudiantes que no tuvieron faltas en el mes.

MEDIDAS DE POSICIÓN

Las medidas de posición permiten resumir o sintetizar los datos correspondientes a toda una población en un solo número que representa al conjunto total. Se obtiene a partir de una muestra y se usa para caracterizarla.

Las medidas de posición más usuales son: promedio, moda y mediana.

Analizaremos las características de cada medida de posición utilizando el siguiente ejemplo:

Esta lista se confeccionó con la cantidad de días de vacaciones que se toman los empleados de una empresa.

12-18-14-16-17-16-18-14-13-17-13-12-17-15-16-14-17-13-16-17

a) ¿Cuál es el número promedio de días de vacaciones?

b) ¿Cuál es el número de días más frecuente de vacaciones?

c) Se quiere dividirlos en dos grupos de igual cantidad de empleados, de manera que en un grupo queden los que menos días se toman y en el otro los que más días se toman. ¿Qué número de días determina la división?

a) El **promedio** o media aritmética de un conjunto de datos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ es el cociente entre la suma de los datos y la cantidad (N) de los mismos.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{N}$$

El promedio de los días de vacaciones es:

$$\bar{x} = \frac{12+18+14+16+17+16+18+14+13+17+13+12+17+15+16+14+17+13+16+17}{20}$$
$$\bar{x} = 15,25$$

b) La **moda** es el valor de la variable que más veces se repite, es decir que tiene la mayor frecuencia absoluta.

En este grupo, el número de días más habitual o más frecuente de vacaciones es 16, entonces $mo(x) = 16$.

c) La mediana es un valor de la variable que divide a la población en 2 grupos de igual cantidad de individuos. Para calcularla, primero se deben ordenar los datos de menor a mayor. Si el número de

datos es impar, la mediana es el valor central; en cambio, si el número de datos es par, la mediana es el promedio entre los dos datos centrales.

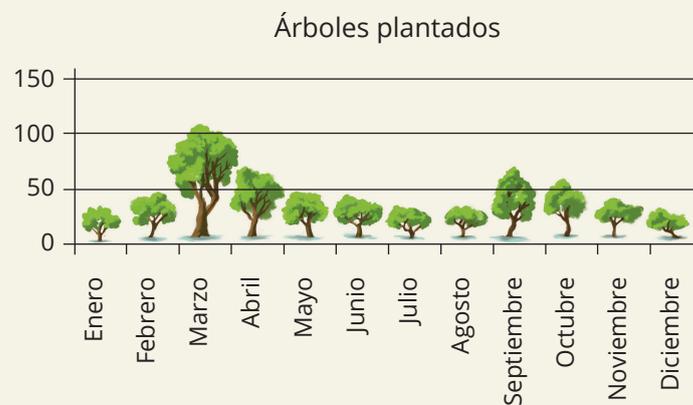
Ordenamos los días de vacaciones de los empleados:

12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 18, 18

Los diez primeros empleados formarán parte de uno de los grupos y los diez segundos del otro. El número de días que divide a los grupos es 16, entonces $me(x) = 16$.

✘ ACTIVIDAD

5) El siguiente gráfico es un **pictograma**, el cual se construye con dibujos alusivos a la variable que se está estudiando. El tamaño de cada dibujo es proporcional a la frecuencia que representa. Conteste observando el gráfico: ¿En qué mes se plantaron menos árboles? ¿Y en cuál se hicieron más plantaciones?

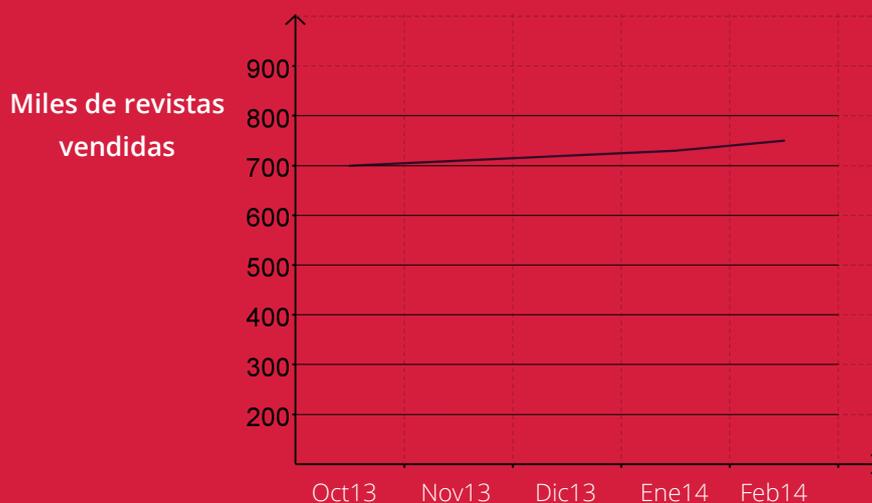




MÁS INFORMACIÓN

El arte de adornar las estadísticas

El director comercial de una editorial ha decidido impresionar al directorio. Pide confeccionar un gráfico que muestre las ventas recientes con el fin de obtener un aumento de sueldo en su gestión. Le entregan el siguiente gráfico:



La verdad es que no es muy impresionante pues parece que las ventas se han estancado y peligra su aumento de sueldo. Pero con astucia, representa los mismos datos cambiando la escala del eje vertical:



Con un poco de suerte, obtendrá el aumento.

RECOMENDACIONES

Si en el Centro Educativo FinEs disponen de un reproductor de DVD, le sugerimos ver con el resto de sus compañeros y acompañados por su tutor el siguiente video:

07 "Estadística" en Estadística y Probabilidad.

También lo pueden consultar en la siguiente página:
<http://fines.educacion.gov.ar/modulos/matematica>

ACTIVIDAD

INTEGRADORA

6) Los siguientes datos representan el número de vacas que murieron por la aftosa en 30 campos afectados por la epidemia:

22-24-23-22-24-22-24-22-24-23-23-20-24-23-20-21-22-25-23-23-21-22-21-23-21-23-25-20-22-25.

- Ordene los datos y construya una tabla.
- Calcule el número más habitual de vacas con aftosa en los campos estudiados.

7) Un equipo de básquet necesita comprar un jugador. Para decidir entre dos candidatos se registró la cantidad de dobles que realizó cada uno en los últimos 10 partidos.

Jugador A: 8-12-15-6-10-9-8-13-11-10

Jugador B: 6-5-15-14-12-10-15-6-7-9

- ¿Cuál es el promedio de dobles por partido de cada jugador?
- ¿Por qué jugador cree que se debería decidir la comisión directiva del club? Justifique.

8) Los bosques cumplen funciones esenciales en el ecosistema brindando hábitat a la fauna silvestre, protegiendo a los suelos de la erosión, reciclando nutrientes, capturando carbono y regulando las cuencas hidrográficas, entre otras funciones. Asimismo, suministran insumos para el consumo doméstico e industrial de leña y madera y proporcionan una gran cantidad de productos forestales no madereros. Los datos demuestran una constante pérdida de superficie de bosque nativo y la existencia de una aceleración del proceso en las últimas décadas. Según las estimaciones efectuadas por la Secretaría de Ambiente y Desarrollo Sustentable, la deforestación para el período 1998-2002 fue de aproximadamente 230.000 ha/año mientras que en el período 2002-2006 se perdieron 330.000 ha/año de bosques nativos (Informe sobre el estado del ambiente año 2012, Secretaría de ambiente y desarrollo sustentable de la Nación).

Usando los datos de la superficie de Bosque Nativo que se muestra en la tabla, calcule el porcentaje de decrecimiento entre los años 2002 y 2006 de la superficie en ha de Bosque Nativo en nuestro país:

Tabla 2.6: Superficie en hectáreas de Bosque Nativo en la República Argentina entre 1937 y 2006

Año 1937	Año 1987	Año 1998	Año 2002	Año 2006
37.535.308	35.180.000	31.443.873	30.073.385	28.743.101

Fuente: Año 1937: Censo Nacional Agropecuario 1937; Año 1987: Estimaciones del Instituto Forestal Nacional; Año 1998: Primer Inventario Nacional de Bosques Nativos; Año 2002 y 2006: Actualización de la Unidad de Manejo del Sistema de Evaluación Forestal - Dirección de Bosques. Secretaría de Ambiente y Desarrollo Sustentable.

9) Analice la siguiente tabla y responda:

SECRETARÍA DE AMBIENTE Y DESARROLLO SUSTENTABLE DE LA NACIÓN - AÑO 2012

Tabla 3.2: Generación de RSU Reciclable

Material	RSU (millones de Ton/año)
Papel y cartón	2.227
Plásticos	1.834
Vidrio	655
Metales	262
TOTAL	4.978

Fuente: Grupo Arrayanes, "Proyecto Nacional para la Gestión Integral de Residuos Sólidos Urbanos BIRF 7362AR", Observatorio Nacional de Gestión de Residuos Sólidos Urbanos, Julio 2011.

- ¿Qué porcentaje de Residuos Sólidos Urbanos es vidrio?
- Indique el tipo de residuo generado más habitual.

10) Según el Informe de ONUSIDA 2014 (agencia de Naciones Unidas dedicada a la lucha contra la pandemia) en la última década se redujeron a nivel mundial más de 35% el número de muertes y 38% las nuevas infecciones de VIH.

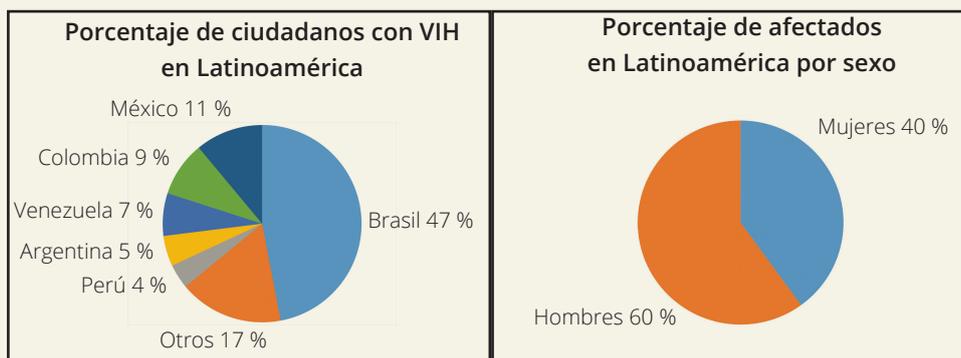
El informe, presentado en Ginebra (Suiza) y basado en datos de 2013, precisó que en la región hay 1,6 millones de personas con VIH.

El Ministerio de Salud de la Nación está implementando campañas más agresivas para incentivar la realización del análisis para detectarlo aumentando la provisión de tests rápidos que tardan 20 minutos para dar el resultado.

ONUSIDA afirma que Argentina es el país de América Latina con mayor cobertura contra el VIH y que cuenta con mayor cobertura antirretroviral entre las personas mayores de 15 años que tienen el

virus de inmunodeficiencia humana (VIH) que causa el SIDA.
 Analice los gráficos y luego responda:

- a) ¿Cuál es el porcentaje de ciudadanos de Latinoamérica con VIH que vive en Argentina?
 b) ¿Cuál es, aproximadamente, el número de ciudadanos con VIH en Argentina?



11) Las calificaciones de María José en las primeras tres pruebas fueron: 5; 7 y 8. Para que le cierren la nota todavía tiene que rendir una prueba más. Si para aprobar la materia tiene que obtener un promedio de 7 o más, ¿cuál es la nota mínima que puede sacarse para aprobar?

12) La siguiente tabla muestra las estaturas en metros de los integrantes de un equipo deportivo:

Estatura (metros)	Número de deportistas
[1,30–1,40)	2
[1,40–1,50)	11
[1,50–1,60)	13
[1,60–1,70)	9
[1,70–1,80)	5
[1,80–1,90)	3
[1,90–2,00)	1

- a) Indique el porcentaje de deportistas que miden entre 1,40 y 1,80 metros.
 b) ¿Cuál es aproximadamente la estatura más habitual del grupo?

13) Los siguientes datos representan las edades de los jugadores de un equipo deportivo

22-24-23-22-24-22-24-22-24-23-23-20-24-23-20-21-22-25-23-23-21-22-21-23-21-23-25-20-22-25.

- Ordene los datos construyendo una tabla.
- Calcule el porcentaje de jugadores que tienen por lo menos 23 años.
- Calcule el porcentaje de jugadores que tienen a lo sumo 21 años.

14) En un puesto de tránsito de una ruta nacional se mide la velocidad de los autos que transitan por la misma. La siguiente tabla fue confeccionada con mediciones hechas en ese puesto:

x (velocidad en km/h)	f (cantidad de autos)
[40;60)	30
[60; 80)	60
[80;100)	120
[100;120)	150
[120;140)	40

- ¿Qué porcentaje de autos será multado por superar los 100 km/h?
- ¿Cuál es aproximadamente la velocidad más frecuente en esta ruta?

15) Los siguientes son los salarios, redondeados en pesos, de los empleados administrativos de una empresa:

x (salario en pesos)	f (cantidad de empleados)
6.000	150
8.000	100
10.000	40
12.000	20
20.000	1
25.000	1

- a) Calcule el promedio y la moda de la muestra.
- b) ¿Qué medida/s de posición elegiría para argumentar la necesidad de un aumento en los salarios si usted fuera el delegado de los empleados? Justifique.



UNIDAD V



PROBABILIDAD



La **probabilidad** es la rama de la matemática que se ocupa de medir el grado de incertidumbre de una situación. La vida diaria nos presenta situaciones en las que interviene el azar. Son situaciones aleatorias, las cuales nos obligan a analizar posibilidades antes de tomar decisiones.

La **teoría de las probabilidades** brinda el marco teórico para justificar nuestra elección con algún criterio científico.

PARA ANALIZAR Y RESPONDER

A un grupo de personas se le hizo una encuesta acerca de su lugar de vacaciones favorito y se obtuvieron los siguientes resultados:

Lugar	Cantidad de personas	Proporción	Porcentaje de personas %
Montaña	150	0,30	30
Playa	250	0,50	50
Nieve	100	0,20	20
Total	500	1	100

- a) ¿Qué porcentaje de personas prefiere la nieve?
- b) Si elegimos una persona al azar, ¿qué es más probable, que prefiera la playa o la montaña?

ANALICE ALGUNAS SOLUCIONES POSIBLES

- a) El 20 % prefiere vacacionar en la nieve.
- b) Para contestar la pregunta del ítem b podemos relacionar la **estadística** con la **probabilidad** por medio de la frecuencia: el 50% prefiere vacacionar en la playa superando al 30% que prefiere vacacionar en la montaña. En matemática existe una ley llamada de los “grandes números”, la cual afirma que a medida que aumenta el tamaño de la muestra encuestada, la frecuencia relativa (r) se aproxima cada vez más a un número que representa la **probabilidad**.

LA PROBABILIDAD

Llamaremos probabilidad de un suceso al cociente entre la cantidad de casos favorables del suceso sobre la cantidad de casos posibles. La probabilidad puede valer entonces como mínimo 0 y como máximo 1.

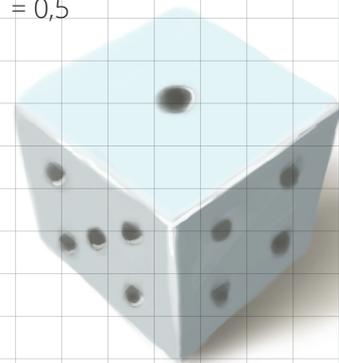
Ejemplifiquemos algunas probabilidades:

-La probabilidad de obtener una carta de copa al realizar una extracción de un mazo de cartas 40 españolas es $\frac{1}{4}$. Escribimos $P(\text{copa}) = \frac{1}{4} = 0,25$.

-La probabilidad de tener una hija mujer: $P(\text{mujer}) = \frac{1}{2} = 0,5$

-La probabilidad de obtener cara al tirar una moneda: $P(\text{cara}) = \frac{1}{2} = 0,5$

-La probabilidad de obtener un as al tirar un dado: $P(\text{as}) = \frac{1}{6}$



✘ ACTIVIDAD

- 1) Calcule la probabilidad de obtener un rey al extraer una carta del mazo de 40 cartas españolas.
- 2) Calcule la probabilidad de obtener el 7 de oro, llamado también el "7 de velo", al extraer una carta del mazo de 40 cartas españolas.
- 3) Tire una moneda al aire 40 veces y anote las veces que sale cara y las que sale ceca.
 - a) ¿Cuántas veces salió cara? ¿Cuál es la frecuencia relativa del resultado?
 - b) ¿Y cuántas ceca? ¿Cuál es la frecuencia relativa del resultado?
 - c) Compare las frecuencias relativas con las probabilidades.

PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

¿Cuál es la probabilidad de sacar una bolilla roja de una bolsa con 20 bolillas rojas? En este caso la probabilidad es $\frac{20}{20} = 1$. Es un “evento cierto”.

¿Cuál es la probabilidad de sacar una bolilla azul de una bolsa con 20 bolillas rojas? En este caso la probabilidad es $\frac{0}{20} = 0$. Se llama “evento nulo”.

La probabilidad de tener septillizos, si bien no es un suceso imposible, es muy baja y cercana a 0. Por el contrario, un suceso de probabilidad próxima a 1 es un suceso casi seguro.

✘ ACTIVIDAD

4) Clasifique como “casi segura”, “medianamente probable”, “poco probable” o “casi imposible” cada una de las siguientes situaciones:

- Finalizar la maratón de 42 km sin entrenar.
- Tener un accidente si manejo a 200 km/h en una calle de la ciudad.
- Aprobar un examen sin haber estudiado.
- Ganar la lotería si compro un sólo número.

5) Lance un dado 50 veces y anote los resultados obtenidos en una tabla.

- ¿Algún número salió muchas veces más que los otros?
- ¿Cuál es frecuencia relativa de cada número?

6) Fermín está vendiendo rifas para el viaje de egresados a La Falda, provincia de Córdoba. Sus tíos, Chiche y Toto, le van a comprar un número cada uno de un talonario que va desde el 00 al 99. Chiche elige el 23 y Toto el 08. ¿Cuál de los dos tiene mayor probabilidad de ganar?

TABLAS DE DOBLE ENTRADA

Una fábrica cuenta con un plantel de 200 empleados. De ellos, 120 son casados, 90 son mujeres y 40 son mujeres pero casadas. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado elegido al azar sea un hombre soltero?

Una forma de representar la información es confeccionando una tabla de doble entrada. Esta tabla nos ayudará a contestar la pregunta:

	Hombre (H)	Mujer (M)	Total
Casados (C)	80	40	120
Solteros (S)	30	50	80
Total	110	90	200

Los datos de la tabla que no están expresados en el enunciado fueron completados por medio de los siguientes razonamientos: como del total de empleados 90 son mujeres y 40 son casadas entonces 50 mujeres son solteras. En total hay 120 empleados casados y sabemos que 40 son mujeres por lo que 80 son hombres casados.

La probabilidad de que sea un hombre y esté casado: $P(H \text{ y } C)$ es $\frac{80}{200} = 0,40$.

La probabilidad de que sea un hombre y esté soltero: $P(H \text{ y } S) = \frac{30}{200} = 0,15$.

× ACTIVIDAD

7) Una empresa automotriz tiene 2 líneas de productos: autos y camionetas. Las ventas totales durante cierto período han sido de 10.000 vehículos, de los cuales 3.000 corresponden a camionetas. De esos 3.000 vehículos vendidos, 2.000 fueron al contado. Complete la tabla sabiendo que el total de los vehículos vendidos a crédito fueron 6.500.

	Autos	Camionetas	Total
Contado		2.000	
Crédito			6.500
Total		3.000	10.000

¿Cuál es la probabilidad de que un vehículo tomado al azar sea un auto vendido a crédito?



8) Se encuestaron 100 personas, de las cuales 60 eran hombres y el resto mujeres; 30 de las personas preferían la música pop y 70 el rock. También se obtuvo que del total de los hombres, 20 prefieren pop. Halle la probabilidad de que al elegir una persona al azar sea hombre y prefiera el rock.

MULTIPLICACIÓN Y CONTEO

Algunos problemas de probabilidad requieren que consideremos a los sucesos de manera que se puedan descomponer en sucesos más simples. Para algunos de estos casos se utiliza una propiedad llamada principio de multiplicación.

Por ejemplo, las patentes de los autos están formadas por tres letras (del abecedario) seguidas por tres cifras (del 0 al 9).



¿Cuál es la cantidad de patentes que se pueden formar combinando todas las letras y todas las cifras?

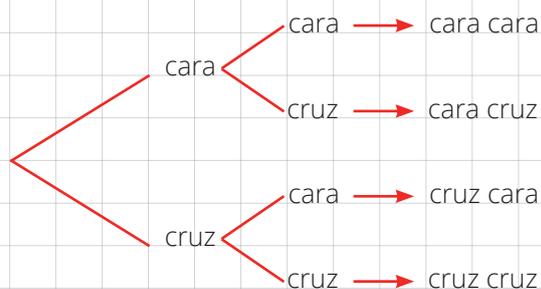
La cantidad de letras del abecedario es 27, entonces hay 27 opciones para el primer espacio, 27 para el segundo y 27 para el tercero. Como los números del 0 al 9 son 10, hay 10 opciones para el cuarto, 10 para el quinto y 10 para el sexto.

Realizamos la cuenta: $27 \cdot 27 \cdot 27 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 19.683.000$. En conclusión, hay 19.683.000 patentes posibles.

DIAGRAMA DE ÁRBOL

Ahora le mostraremos un modo útil de esquematizar una situación que facilita su resolución y la comprensión del principio de multiplicación: los diagramas de árbol.

¿Cuál es la probabilidad de que salgan dos caras al lanzar dos veces una moneda?



Cuatro sucesos elementales,
 $E = \{\text{cara cara, cara cruz, cruz cara, cruz cruz}\}$

Cada una de las flechas indica una probabilidad de $\frac{1}{2}$. A su vez, para el segundo lanzamiento se dibujan otras 2 flechas, cada una indica una probabilidad de $\frac{1}{2}$. La probabilidad $P(\text{cara / cara}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

También podemos calcular esa probabilidad apelando al principio de multiplicación. Para la primera tirada tenemos 2 posibilidades, lo mismo que para la segunda. Si queremos calcular todas las combinaciones posibles de resultados debemos hacer la cuenta: $2 \cdot 2 = 4$. De todas las opciones posibles solo una representa el resultado "cara / cara". Entonces, la probabilidad $P(\text{cara / cara}) = \frac{1}{4}$.

✘ ACTIVIDAD

9) El equipo de fútbol del barrio tiene una probabilidad de $\frac{1}{3}$ de ganar cada partido. Calcular la probabilidad de que:

- Gane exactamente 2 partidos consecutivos.
- No gane 1 partido.
- No gane 2 partidos seguidos.

PARA ANALIZAR Y RESPONDER

Dos jugadores, Anibal y Beatriz ponen sobre una mesa una apuesta de \$10.000 cada uno. Ambos elijen un número del 1 al 6 y se llevará los \$20.000 aquel cuyo número salga primero 3 veces en el dado. Resulta que, después de unas tiradas, el número que eligió Anibal salió 2 veces y el número que eligió Beatriz sólo 1 vez pero hete aquí que Beatriz debe abandonar la partida.

¿Cómo se reparten los \$20.000 de forma que se respeten los resultados obtenidos hasta el momento??

ANALICE ALGUNAS SOLUCIONES POSIBLES

a) Como el juego no se pudo terminar, los jugadores van a repartir el dinero apostado respetando la cantidad de veces que salió el número elegido. El número de aciertos logrados entre los dos es 3 (dos de Anibal y uno de Beatriz). Por lo tanto Anibal se llevara dos tercios del premio y Beatriz un tercio.

Anibal: $\frac{2}{3} \cdot 20000 = 13333,33$

Beatriz: $\frac{1}{3} \cdot 20000 = 6666,66$

ACTIVIDAD

INTEGRADORA

10) Si se extrae al azar una carta de un mazo de cartas españolas (40):

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de oro?
- b) ¿Y que sea un 3?
- c) ¿Y que sea un 3 de oro?

11) En una escuela todos los alumnos deben elegir solamente un taller. En la tabla que se muestra a continuación se describe la cantidad de alumnos que eligió cada taller, agrupados por género.

- a) ¿Cuántos alumnos concurren al taller de informática?
- b) ¿Cuántos son varones y eligieron diseño?
- c) ¿Cuántos en total concurren a diseño o a música?
- d) ¿Cuántas son mujeres y concurren a música?

Sexo	Diseño	Música	Informática
Hombre	200	600	1.200
Mujer	400	800	1.800

12) Una empresa cuenta con 60 trabajadores que se dividen en operarios y administrativos y se sabe que 50 son operarios. Además, se sabe que entre los empleados administrativos hay 8 mujeres y entre los operarios hay 38 hombres. Si se elige un empleado al azar, calcule la probabilidad que:

- a) Sea operario.
- b) Sea empleada administrativa mujer.

13) ¿Cuál es la probabilidad de obtener solamente una cara en dos lanzamientos de una moneda?

14) Si se extrae al azar una carta de un mazo de cartas francesas (52):

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea el as de diamante?
- b) ¿Y de que sea de diamante?
- c) ¿Y de que sea un as?

15) Si se extrae una bolilla de una urna que contiene 3 bolillas blancas y 7 negras, ¿cuál es la probabilidad de extraer una bolilla blanca y cuál de extraer una bolilla negra?

16) Si se extrae una galletita de un paquete que contiene 16 galletitas de vainilla, 30 de chocolate y 15 de frutilla, ¿qué es más probable, que la galletita extraída sea de chocolate o que no lo sea?

17) Un paquete de caramelos contiene varios gustos y en distintas cantidades: 10 de limón, 12 de naranja y 8 de frutilla. Se extrae un caramelo al azar. Para cada uno de los gustos, calcular la probabilidad de que el caramelo extraído sea de ese gusto.



**ACTIVIDAD INTEGRADORA
DEL MÓDULO**

En economía se describen funciones de demanda que analizan la relación entre la cantidad de la mercadería demandada y alguna otra variable como ser precio, tiempo, etc.

Consideremos una función de demanda en la cual la cantidad (q) de unidades demandadas de una determinada mercadería depende exclusivamente de su precio (p). Se define también una función de oferta, que describe la relación entre la cantidad ofrecida (q) y su precio (p).

Bajo la suposición de que existe competencia pura (es decir que no haya influencia sobre los precios del mercado) se dice que se ha alcanzado el equilibrio del mercado cuando la cantidad ofrecida de una determinada mercadería coincide con la cantidad demandada.

- a) Calcule ceros o raíces, ordenada al origen y grafique la función de oferta $p = q + 3$.
- b) Calcule ceros o raíces, ordenada al origen y grafique en el mismo par de ejes la función de demanda $p = 9 - q$.
- c) Halle el punto de equilibrio entre ambas.

CLAVES DE CORRECCIÓN



UNIDAD I

1) La opción correcta es la c)

2)

$$2x - 4 = x + 1$$

$$2x - x = 1 + 4$$

$$x = 5$$

$$y = x + 1$$

$$y = 5 + 1 = 6$$

$$S = \{(5; 6)\}$$

3) Los números son 2 y 3.

4)

a) Llamamos "x" al primer número; "y" al segundo número y planteamos:

$$\{x + 3y = 11\}$$

$$\{3x - 2y = -22\}$$

Despejamos "x" de la primer ecuación: $x = 11 - 3y$ y la sustituimos en la segunda ecuación:

$$3 \cdot (11 - 3y) - 2y = -22$$

$$33 - 9y - 2y = -22$$

$$33 + 22 = 9y + 2y$$

$$55 = 11y$$

$$55 : 11 = y$$

$$5 = y$$

Reemplazamos en $x = 11 - 3y$

$$x = 11 - 3 \cdot 5$$

$$x = 11 - 15$$

$$x = -4$$

Respuesta: los números son -4 y 5.

b) Llamamos "x" al número de billetes de \$10; "y" al número de billetes de \$2:

$$\{x + y = 9\}$$

$$\{10x + 2y = 50\}$$

Despejando $x = 9 - y$

se reemplaza en $10(9 - y) + 2y = 50$

$$90 - 10y + 2y = 50$$

$$90 - 50 = -2y + 10y$$

$$40 = 8y$$

$$40 : 8 = y$$

$$5 = y$$

Si $x = 9 - y$

$x = 9 - 5 = 4$

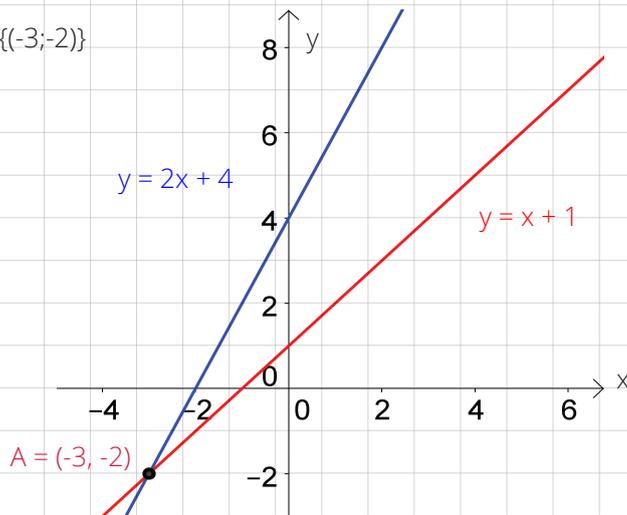
Respuesta: hay 4 billetes de \$10 y 5 de \$2.

c) $\{2x+2y=24\}$

$\{x=y+2\}$

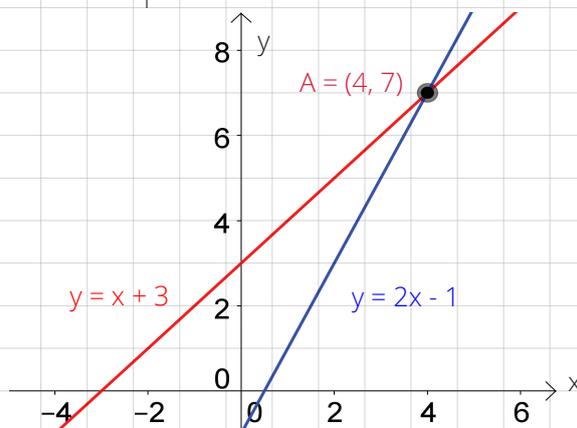
La base mide 7 metros y la altura 5 metros.

5) $S = \{(-3; -2)\}$

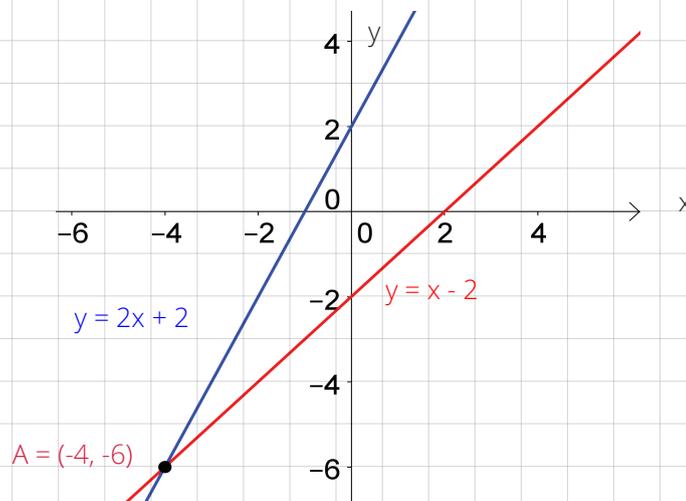


6)

a) $S = \{(4; 7)\}$

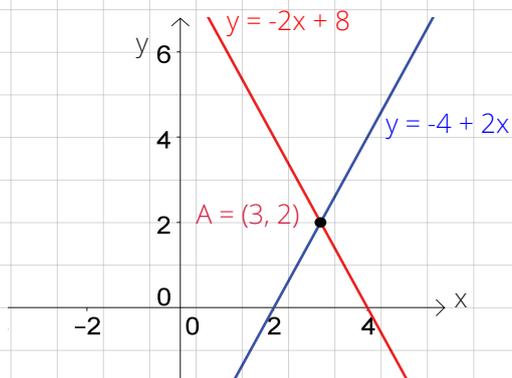


b) $S = \{(-4; -6)\}$



7) Aplicando el método de igualación:

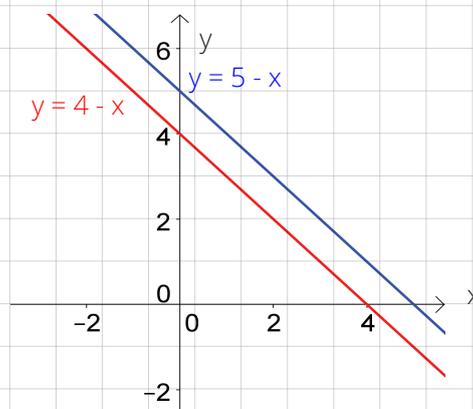
$$\begin{aligned} &\{y = -4 + 2x\} \\ &\{y = -2x + 8\} \\ &-4 + 2x = -2x + 8 \\ &2x + 2x = 8 + 4 \\ &4x = 12 \\ &x = 3 \\ &\text{Si } y = -4 + 2x \\ &y = -4 + 2 \cdot 3 \\ &y = -4 + 6 \\ &y = 2 \\ &S = \{(3; 2)\} \end{aligned}$$



8)

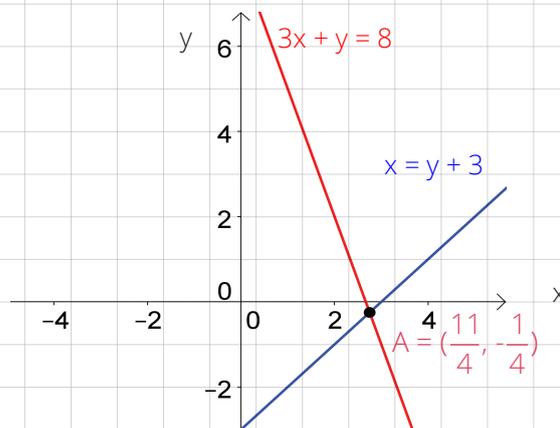
a) Aplicando el método de igualación:

$$\begin{aligned} &\{y = 5 - x\} \\ &\{y = 4 - x\} \\ &5 - x = 4 - x \\ &5 - 4 = x - x \\ &1 = 0 \text{ es un absurdo} \\ &\text{Respuesta: sistema incompatible. Rectas paralelas.} \\ &\text{Solución: conjunto vacío; } S = \emptyset \end{aligned}$$



b)

$$\begin{aligned} &x = y + 3 \\ &3(y + 3) + y = 8 \\ &3y + 9 + y = 8 \\ &4y = 8 - 9 \\ &4y = -1 \\ &y = -\frac{1}{4} \\ &\text{Respuesta: Sistema compatible, determinado.} \\ &\text{Rectas secantes.} \\ &\text{Solución única } S = \left\{ \left(\frac{11}{4}, -\frac{1}{4} \right) \right\} \end{aligned}$$



c) $4x + 2y = 16$

$2y = 16 - 4x$

$y = (16 - 4x) : 2$

$y = 8 - 2x$

$-2x - 12 = y$

Aplicando el método de igualación:

$8 - 2x = -2x - 12$

$8 + 12 = -2x + 2x$

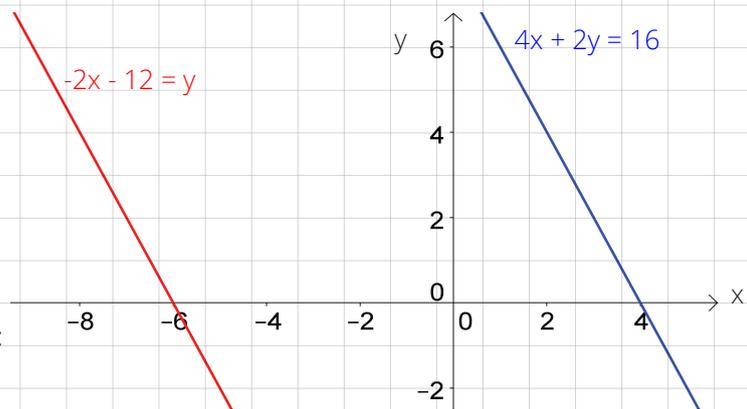
$20 = 0x$

$20 = 0$ es un absurdo

Respuesta: el sistema es incompatible.

Rectas paralelas.

Solución: conjunto vacío; $S = \emptyset$



9)

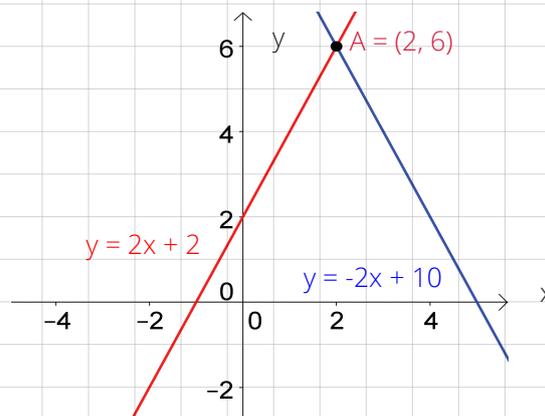
b) $y = -2x + 10$

c) $y = 2x + 2$

d) $\{y = -2x + 10\}$

$\{y = 2x + 2\}$

e) $S = \{(2; 6)\}$



10) La opción correcta es la c)

11)

a) Llamamos "x" al primer número; "y" al segundo número y planteamos:

$\{x + 2y = 16\}$

$\{3x - y = 20\}$

Respuesta: los números son 8 y 4.

b) Llamamos "x" a la primera distancia; "y" a la segunda distancia y planteamos:

$\{x + y = 500\}$

$\{x - y = 100\}$

Respuesta : las distancias son de 300 y 200 km.

c) $\{x - y = 2\}$

$\{x + y = 58\}$

Respuesta: las edades son 30 y 28.

12)

- a) $S = \{(4; 3)\}$
- b) $S = \{(-6; 2)\}$
- c) $S = \{(2; 2)\}$
- d) $S = \{(2; -2)\}$

13)

$$\{x + y = 10\}$$

$$\{x - y = 2\}$$

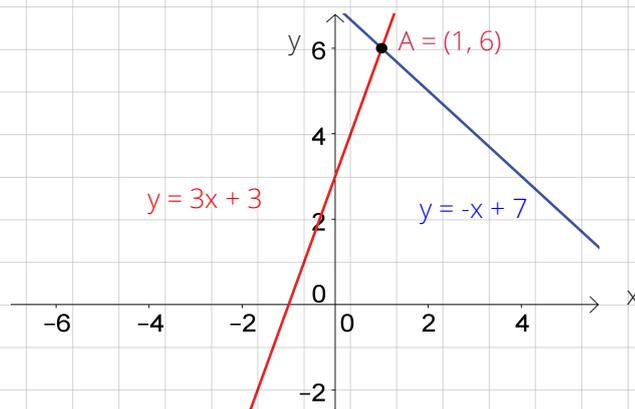
Respuesta: el primer número es 6 y el segundo número es 4.

14)

La respuesta correcta es la "c".

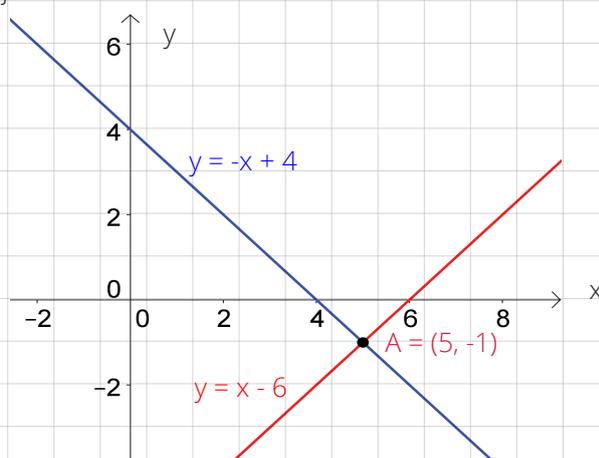
15)

$$S = \{(1; 6)\}$$



16)

$$S = \{(5; -1)\}$$

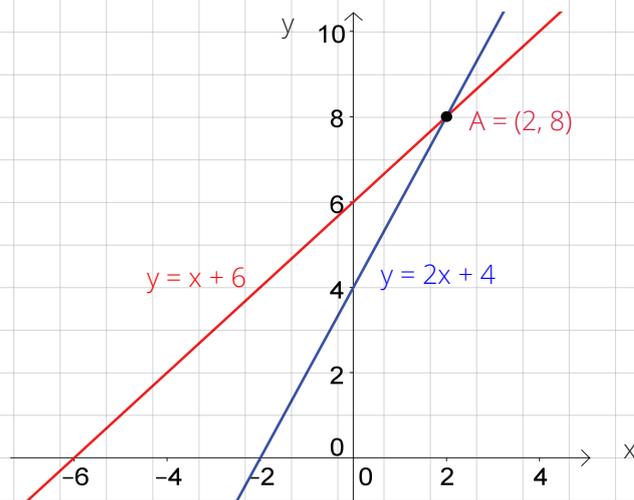


17)

- a) La altura mide 4 metros y la base es de 12 metros.
- b) El primer número es 24 y el segundo, 12.

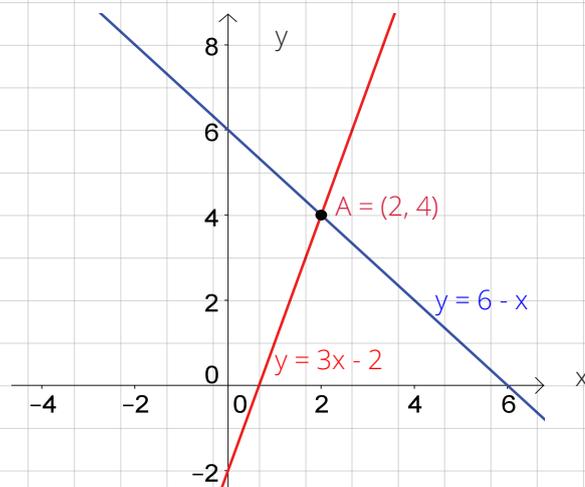
18)

$$S = \{(2; 8)\}$$



19)

- b) $y = 6 - x$
- c) $y = 3x - 2$
- f) $S = \{(2; 4)\}$



20)

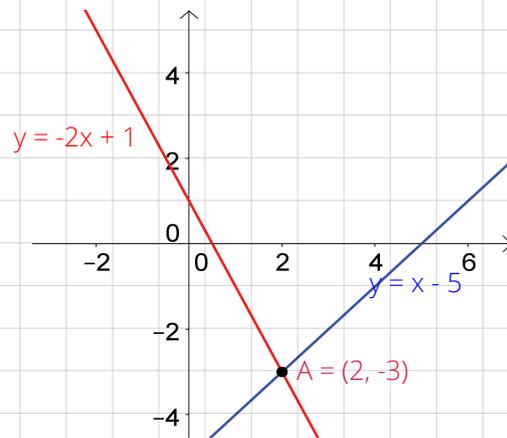
- a) $S = \{(3; 0)\}$
- b) $S = \{(7; 0)\}$
- c) $S = \{(3; -4)\}$
- d) $S = \{(1; 2)\}$

21) El primer número es -4 y el segundo número es 0.

22) La respuesta correcta es la "b".

23)

$$S = \{(2; -3)\}$$



24)

a) La base mide 10 cm y la altura es de 5 cm

b) El primer número es 45 y el segundo número es 15

25)

Una situación problemática podría ser: "La suma de 2 números es 12 y la diferencia es 2. ¿Cuáles son esos números?".

26)

El hermano mayor recibió \$800 y el hermano menor, \$200

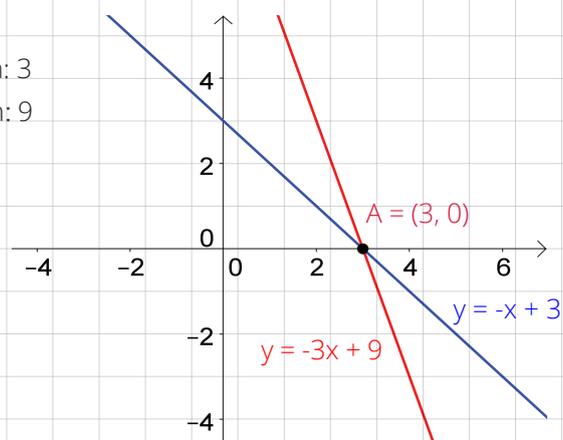
27)

a) Ordenada al origen: 3

b) Ordenada al origen: 9

c) (3; 0)

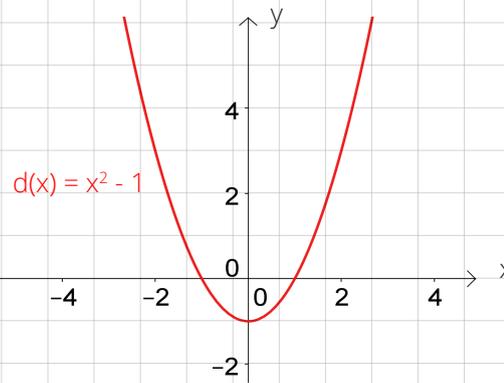
d) $S = \{(3; 0)\}$



UNIDAD II

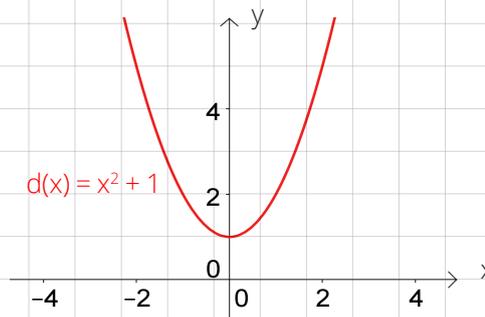
1)

x	$y = x^2 - 1$
-3	8
-2	3
-1	0
0	-1
1	0
2	3
3	8



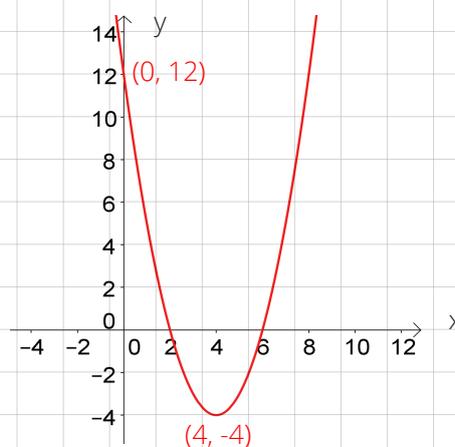
2)

x	$y = x^2 + 1$
-3	10
-2	5
-1	2
0	1
1	2
2	5
3	10



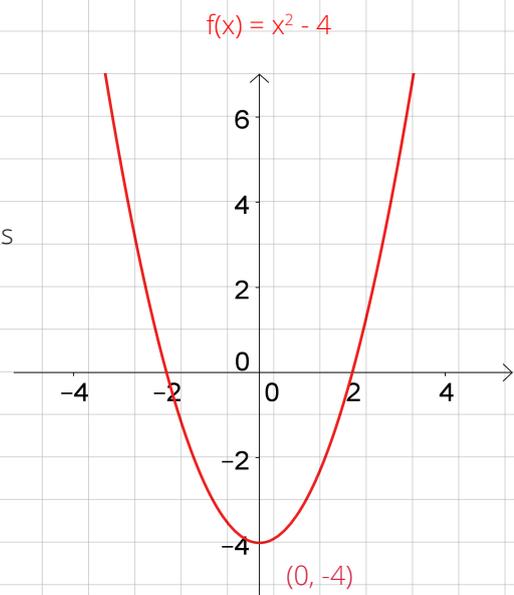
3)

- a) Los coeficientes son: $a = 1$; $b = -8$; $c = 12$
- b) 12
- c) $V = (4; -4)$ el cual es un mínimo
- d) Su concavidad es positiva pues su término cuadrático es positivo.



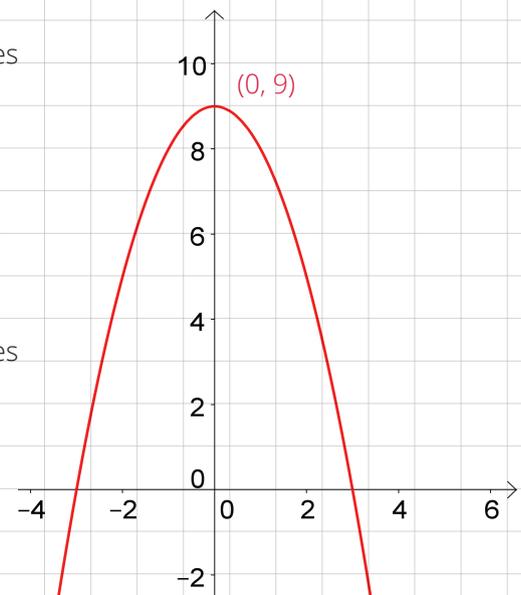
4)

- a) $C_0 = \{-2, 2\}$
- b) 4
- c) Ver gráfico.
- d) Su concavidad es positiva pues su término cuadrático es positivo y vale 1.
- e) $V = (0; -4)$ el cual es un mínimo



5)

- a) Los coeficientes son: $a = -2$; $b = 16$; $c = -30$
- b) -30
- c) $V = (4; 2)$ el cual es un máximo
- d) Su concavidad es negativa pues su término cuadrático es negativo.

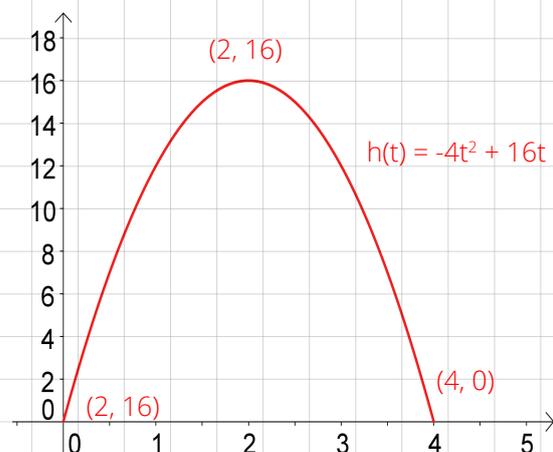


6)

- a) $C_0 = \{-3, 3\}$,
- b) 9
- c) Ver gráfico.
- d) Su concavidad es negativa pues su término cuadrático es negativo y vale -1.
- e) $V = (0; 9)$ el cual es un máximo.

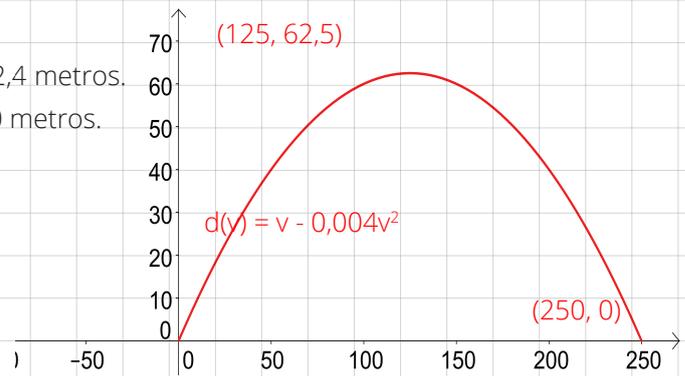
7)

- a) A los 3 segundos la altura es de 12 metros.
- b) Ver gráfico.
- c) El cohete tarda 4 segundos en volver
- d) A los 2 segundos alcanza la altura máxima
- e) La altura máxima es de 16 metros



8)

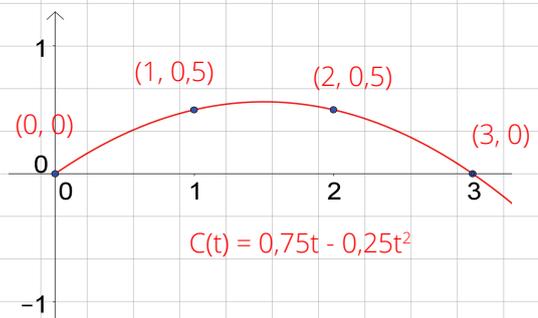
- b) Para 120 km/h la distancia de frenado es de 62,4 metros.
- c) Para 100 km/h la distancia de frenado es de 60 metros.
- d) La distancia máxima es alcanzada a los 125 km/h.
- e) La distancia máxima alcanzada es de 62,5 m.



9)

a)

t	C(t) = 0,75t - 0,25t ²
0	0
1	0,5
2	0,5
3	0



- b) La sustancia tarda 3 horas en desaparecer
- c) A las 2 horas la concentración es de 0,5 mg/ml

10)

- a) Los coeficientes son: a = 1 ; b = 6; c = 9
- b) 9
- c) V = (-3; 0) el cual es un mínimo
- d) Su concavidad es positiva pues su término cuadrático es positivo.

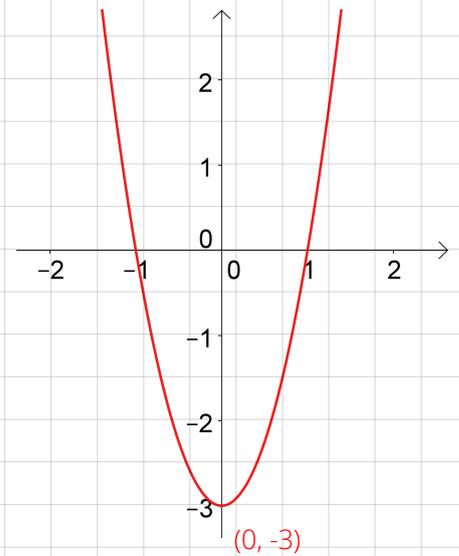
11)

- a) Los coeficientes son: a = 6; b = -1; c = 0
- b) Su concavidad es positiva pues a = 6 es positivo

12)

- a) C₀ = {-1, 1}
- b) -3

- c) Ver gráfico.
- d) Su concavidad es positiva pues su término cuadrático es positivo y vale 3.
- e) $V = (0; -3)$ el cual es un mínimo.



13)

- a) Al segundo se encuentra a una altura de 12 metros.
- b) A los 2 segundos se encuentra a una altura de 12 metros.
- c) A los 3 segundos llega al suelo.
- d) El vértice es $V = (1,5; 13,5)$. Al segundo y medio la piedra llega a la máxima altura de 13,5 metros.

14)

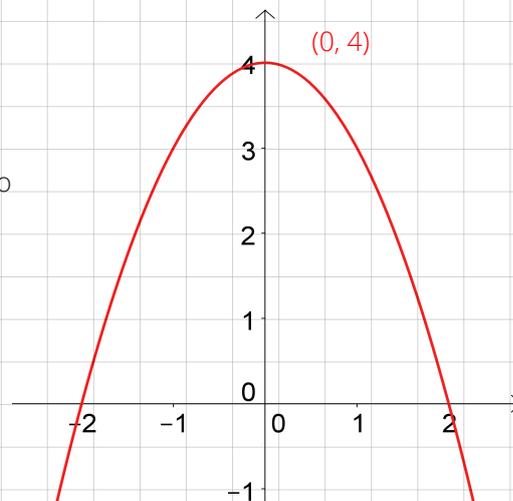
- a) Los coeficientes son: $a = 1; b = -10; c = 25$.
- b) 25
- c) $V = (5; 0)$ el cual es un mínimo.
- d) Su concavidad es positiva pues su término cuadrático es positivo.

15)

- a) Para un abono de \$80 el ingreso es de \$64.000.
- b) Y para uno de \$90, el ingreso es de \$36.000.
- c) El vértice es $(50; 100.000)$, para un abono de \$50 el ingreso es máximo y de \$100.000.

16)

- a) $C_0 = \{-2, 2\}$,
- b) 4
- c) Ver gráfico.
- d) Su concavidad es negativa pues su término cuadrático -1 es negativo.
- e) $V = (0; 4)$ el cual es un máximo



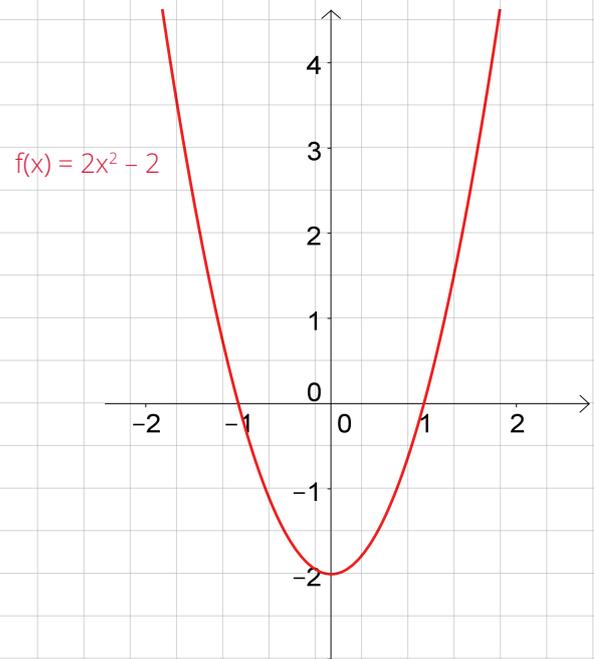
17)

- a) Al segundo se encuentra a una altura de 5 metros.
- b) Y a los 2 segundos llega al suelo.

18)

Para la función cuadrática $f(x) = 2x^2 - 2$

- a) $C_0 = \{-1, 1\}$
- b) -2
- c) Ver gráfico
- d) Su concavidad es positiva pues su término cuadrático es positivo y vale 2.
- e) $V = (0; -2)$ el cual es un mínimo

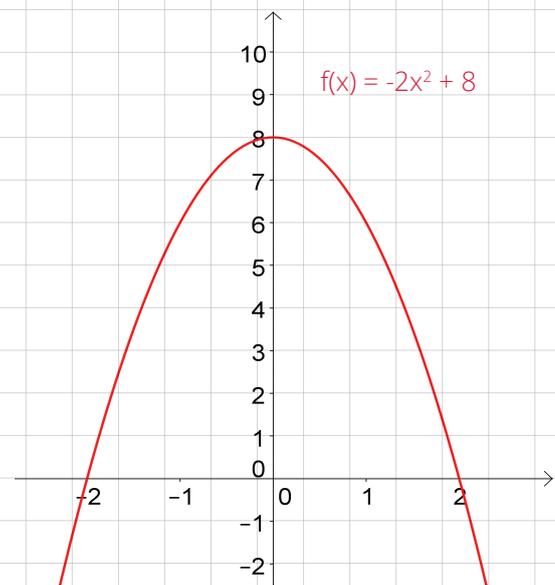


19)

- a) Los coeficientes son: $a = 2$; $b = -1$; $c = 0$.
- b) Su concavidad es positiva pues $a = 2$ es positivo.

20)

- a) $C_0 = \{-2, 2\}$.
- b) 8
- c) Ver gráfico.
- d) Su concavidad es negativa pues su término cuadrático -2 es negativo.
- e) $V = (0; 8)$ el cual es un máximo.



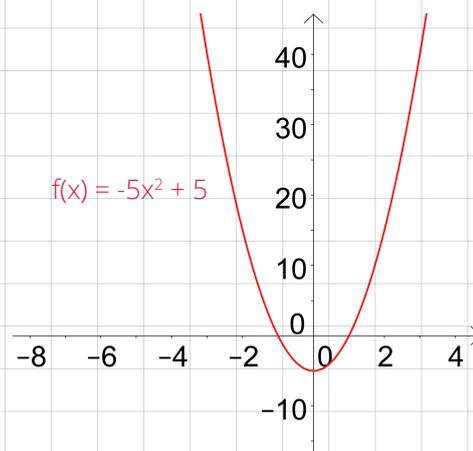
21)

- a) El ingreso para 60 unidades es de \$48.000.
- b) Y para 90 unidades es de \$18.000.

22)

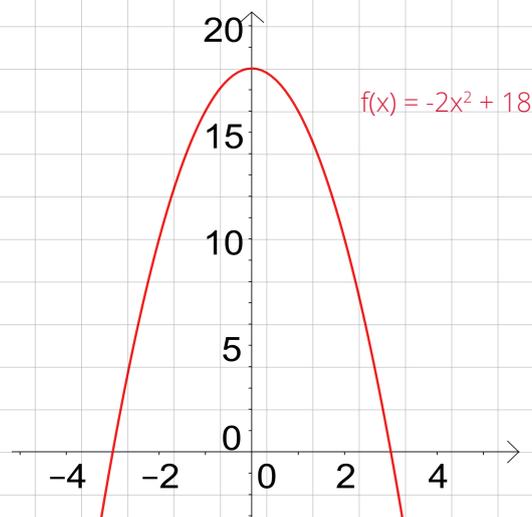
- a) $C_0 = \{-1, 1\}$.
- b) -5

- c) Ver gráfico.
- d) Su concavidad es positiva pues su término cuadrático es positivo y vale 5.
- e) $V = (0; -5)$ el cual es un mínimo.



- 23)
- a) La eficacia a las 4 horas es de 9 unidades.
 - b) La eficacia a las 7 horas es de 6 unidades.

- 24)
- a) $C_0 = \{-3, 3\}$.
 - b) 18
 - c) Ver gráfico.
 - d) Su concavidad es negativa pues su término cuadrático es negativo y vale -2.
 - e) $V = (0; 18)$ el cual es un máximo.



- 25)
- a) Al inicio hay 2,3 unidades.
 - b) A las 2 horas hay 3,1 unidades.

- 26)
- a) Los coeficientes son: $a = 1$; $b = -4$; $c = 0$.
 - b) 0.
 - c) $V = (2; -4)$ el cual es un mínimo.
 - d) Su concavidad es positiva pues su término cuadrático es positivo.

- 27)
- a) Los coeficientes son: $a = 5$; $b = -5$; $c = 0$.
 - b) Su concavidad es positiva pues $a = 5$ es positivo y su vértice se encuadra en $(1/2; -5/4)$.

- 28)
- a) Al segundo se encuentra a los 8 metros.
 - b) A los 3 segundos se encuentra en el piso.
 - c) El vértice es $V = (1,5; 9)$. Al segundo y medio se encuentra a 9 metros del piso.

UNIDAD III

- 1)
 - a) $x = 6$
 - b) $x = 8/3$

- 2)
 - a) La distancia que tendrán en el mapa es de 11 cm.
 - b) Las 2 ciudades están a 350 km de distancia real.

- 3) El largo de la cancha se representa con 1,4 cm en la maqueta.

- 4) Una resolución podría ser plantear la proporción: $\frac{x}{1,6} = \frac{7}{0,7}$.
La altura del árbol grande es de 16 m.

- 5) La altura de la pirámide de Keops es de aproximadamente 146 m.

- 6)
 - a) $\tan 70^\circ \approx 2,75$
 - b) $\tan 45^\circ \approx 1$
 - c) $\tan \alpha = 1,73$; entonces $\alpha = 60^\circ$
 - d) $\tan \beta = 19$; entonces $\beta = 87^\circ$
 - e) $\sin 30^\circ = 0,5$
 - f) $\cos 60^\circ = 0,5$

- 7) La amplitud es de 42° .

- 8)
 - a) La altura de la torre es de 17,3 m.
 - b) La longitud del cable es de 34,6 m.

- 9) La sombra de la persona es de 3 m.

- 10) El ángulo de inclinación tiene una amplitud de 36° .

- 11) La longitud de la escalera es de 2,33 m.

- 12) Las medidas son: largo real 4,23 m y ancho real 1,71 m.

- 13) La altura del edificio es de 320 m.

14) La escalera alcanza 24 m.

15)

- a) La base mide 5,82 mm.
- b) El perímetro mide 22,8 mm.

16) El ángulo de la rampa tiene una amplitud de $14^\circ 28'$.

17)

a) $x = \frac{1}{5}$

b) $x = \frac{8}{3}$

c) $x = 1,5$

d) $x = \frac{5}{3}$

18)

- a) La hipotenusa del rectángulo mide 10 cm.
- b) El perímetro mide 24 cm y la superficie 24 cm^2 .

19)

- a) $\tan 80^\circ \approx 5,67$
- b) $\tan 30^\circ \approx 0,577$
- c) $\tan \alpha = 0,5$; obtenga $\alpha = 26^\circ 30'$
- d) $\tan \beta = 1,5$; obtenga $\beta = 56^\circ$
- e) $\text{sen } 60^\circ = 0,866$
- f) $\text{cos } 30^\circ = 0,866$
- g) $\tan 89^\circ \approx 57,29$
- h) $\tan 269^\circ \approx 57,29$
- i) $\tan a = 3$; obtenga $a = 71^\circ 30'$
- j) $\tan b = 4$; obtenga $b = 76^\circ$
- k) $\text{sen } 150^\circ = 0,5$
- l) $\tan 135^\circ \approx -1$
- m) $\tan 315^\circ \approx -1$
- n) $\tan \alpha = 1$; obtenga $\alpha = 45^\circ$
- o) $\tan \beta = 2$; obtenga $\beta = 63^\circ$
- p) $\text{sen } 130^\circ = 0,766$
- q) $\text{cos } 50^\circ = 0,64$
- r) $\text{cos } 30^\circ = 0,866$

20)

- a) En el mapa tienen una distancia de 50 cm.
- b) La distancia real es de 20 km.

21)

- a) La altura mide 6 cm.
- b) La diagonal es de 10 cm.

22)

- a) La distancia en el mapa es de 30 cm.
- b) La distancia real es de 30 km.

23) El perímetro mide 18 cm y la superficie 12 cm².

24)

- a) La hipotenusa del rectángulo mide 13 cm.
- b) El perímetro mide 30 cm y la superficie 30 cm².

25)

- a) La diagonal del rectángulo mide 13 cm.
- b) El perímetro mide 34 cm y la superficie 60 cm².

UNIDAD IV

1)

a, b, d y f Variables cuantitativas.

c y e Variables cualitativas.

2)

a) Unidad muestral: una arandela.

Variable: de tipo cuantitativa, diámetro de una arandela.

Tamaño de la Muestra: 100.

Población: todas las arandelas del lote.

b) Unidad muestral: hogar de la Argentina en el año 2001.

Variable cualitativa: categórica con 2 categorías:

1) hogar con heladera con freezer y 2) hogar sin heladera con freezer.

Población: todos los hogares de la Argentina en el año 2001.

c) Unidad muestral: un auto.

Variable: cuantitativa, el precio de un auto.

Tamaño de la Muestra: 300.

3) No le conviene. Le convendría comprar aproximadamente 2.400 pares ya que en la compra anterior compró aproximadamente un 20 % del n° 38 (y 2.400 es el 20 % de 12.000).

4)

x	f
0	2
1	7
2	8
3	1
4	1
5	1

c) El 10 % no tuvo ausencias.

5) En enero se plantaron menos árboles y marzo fue el mes donde más se hicieron plantaciones.

6)

a)

Número de vacas	Número de campos
20	3
21	4
22	7
23	8
24	5
25	3

b) El número más habitual de vacunos que murió con aftosa es de 23.

7)

a) El jugador A tiene un promedio de 10,2 dobles por fecha y el jugador B un promedio de 9,9 dobles por fecha.

b) La comisión directiva podría elegir al jugador A pues aparentemente es el que tiene un rendimiento más homogéneo, es decir más regular.

8) El porcentaje de decrecimiento entre los años 2002 y 2006 de la superficie en ha de bosque nativo en nuestro país fue del 4,4 %, aproximadamente.

9)

a) Aproximadamente el 13 % de residuos sólidos urbanos es vidrio.

b) El tipo de residuo generado más habitual es el correspondiente al papel y al cartón.

10)

a) En Argentina viven el 5 % de los infectados con VIH de Latinoamérica.

b) El número aproximado de ciudadanos con VIH en Argentina es el 5 % de 1,6 millones, que equivale a 80.000 habitantes.

11) María José necesita por lo menos una calificación de 8 para aprobar.

12)

a) El 86,36 % mide entre 1,40 y 1,80 metros.

b) La estatura más habitual del grupo está entre 1,50 y 1,60 m.

13)

a)

Edad (años)	Nro de jugadores
20	3
21	4
22	7
23	8
24	5
25	3

Total = 30

- b) El 53,33 % tiene por lo menos 23 años de edad.
c) Y el 23,33 % a lo sumo 21 años de edad.

14)

- a) El 47,5 % supera los 100 km/h.
b) La velocidad típica es de aproximadamente 110 km/h.

15)

- a) La moda es \$6.000 y el promedio es \$7.644,23.
b) Si fuera el delegado de los empleados argumentaría que la moda es \$6.000 ya que la mayoría tiene menor salario que el promedio.

UNIDAD V

- 1) $\frac{4}{40} = 0,10$
- 2) $\frac{1}{40} = 0,025$
- 3) Se espera que la frecuencia relativa del resultado cara y ceca sea cercano a $\frac{1}{2}$.
- 4)
- a) Casi imposible.
 - b) Casi segura.
 - c) Poco probable.
 - d) Casi imposible.
- 5) Se espera que la frecuencia relativa de los 6 números sea cercana a $\frac{1}{6}$.
- 6) Ambos tienen la misma probabilidad de ganar: $\frac{1}{100}$ c/u.
- 7) $P(\text{auto y crédito}) = \frac{5.500}{10.000} = 0,55$.
- 8) $P(\text{hombre y rock}) = \frac{40}{100} = 0,40$
- 9)
- a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
 - b) $\frac{2}{3}$
 - c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$
- 10)
- a) $\frac{10}{40} = 0,25$
 - b) $\frac{4}{40} = 0,1$
 - c) $\frac{4}{40} = 0,025$
- 11)
- a) 3.000 alumnos concurren a Informática.
 - b) 200
 - c) 2.000
 - d) 800
- 12)
- a) La probabilidad de que sea operario es de $\frac{5}{6}$
 - b) $\frac{8}{60}$

13) $\frac{1}{2}$

14)

a) $\frac{1}{52}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{13}$

15)

a) $P(B) = 0,30$

b) $P(N) = 0,70$

16) Es más probable que no sea de chocolate

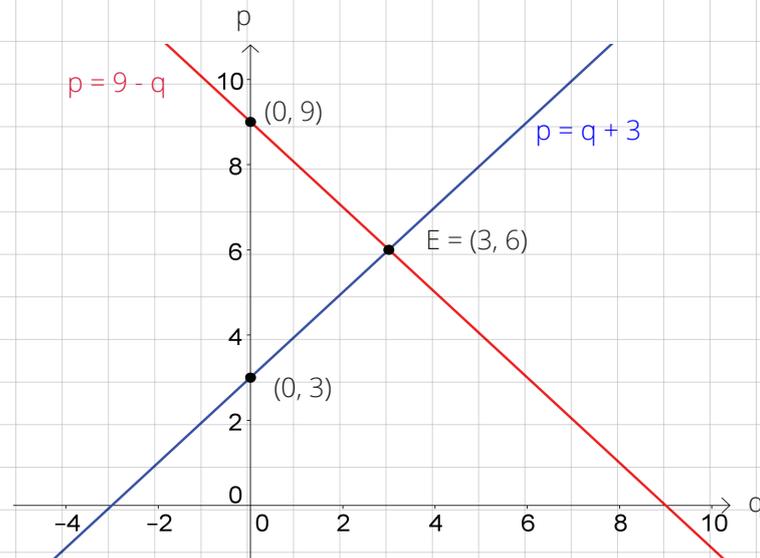
17)

$$P(\text{limón}) = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{naranja}) = \frac{2}{5}$$

$$P(\text{frutilla}) = \frac{4}{15}$$

ACTIVIDAD INTEGRADORA



- a) $Co = \{-3\}$ ordenada al origen 3.
- b) $Co = \{9\}$ ordenada al origen 9.
- c) El punto de equilibrio es $(3; 6)$, es decir que si la cantidad "Q" es 3, su precio "P" de equilibrio será 6.

**BIBLIOGRAFÍA, FUENTES
Y OTROS RECURSOS**



BIBLIOGRAFÍA TEÓRICA

- Altman, Silvia; Comparatore, Claudia y Kurzrok, Liliana (2003). *Matemática Polimodal*, Buenos Aires, Longseller.
- Bocco, Mónica (2009), *Funciones elementales*, C.A.B.A, Ministerio de Educación. Instituto Nacional de Educación Tecnológica.
- Chemello, Graciela y Díaz, Adriana (1997), *Matemática: Metodología de la Enseñanza Parte II*, Buenos Aires, Prociencia, Conicet. Ministerio de Cultura y Educación de la Nación.
- Cramér, Harald (1963), *Elementos de la teoría de probabilidades*, Madrid, Aguilar.
- Dantzig, Tobias (1971), *El Número. Lenguaje de la ciencia*, Buenos Aires, Hobbs-Sudamericana.
- De Guzmán, Miguel; Colera, José y Salvador, Adela (1987), *Bachillerato 1*, Madrid, Anaya.
- De Guzmán, Miguel; Colera, José y Salvador, Adela (1989), *Matemáticas II.C.O.U.*, Madrid, Anaya.
- Demana, Franklin; Waits, Bert; Foley, Gregory; Kennedy, Daniel y Blitzer, Robert (2009), *Matemáticas universitarias introductorias*, México, Pearson.
- Fernández Moreno, M. Selva y Ottolenghi-Viterbi, Carla (2001), *Matemática 9*, Buenos Aires, Kapelusz.
- García Arenas, Jesús. e Infante Celesti Bertrán (1988), *Geometría y experiencias*, Madrid, Biblioteca de Recursos Didácticos Alhambra.
- Gnedenko, Boris y Jinchin, Alexander (1981), *Introducción al cálculo de probabilidades*, Buenos Aires, EUDEBA.
- Kaczor, Pablo; Schaposchnik, Ruth; Franco, Eleonora; Cicala, Rosa; Díaz, Bibiana (1999), *Matemática I*, Buenos Aires, Santillana.
- Kelmansky, Diana (2009), *Estadística para todos*, C.A.B.A, Ministerio de Educación. Instituto Nacional de Educación Tecnológica.
- Macé, Federico (1984), *La sabiduría pitagórica*, México, Orion.
- Nuñez, J & Lenzi, R. (1968), *Introducción al cálculo de probabilidades*, Buenos Aires, Centro Argentino de profesores de Enseñanza Media.
- Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (2007) Apoyo al último año de la secundaria para la articulación con el Nivel Superior. *Cuaderno de trabajo para los alumnos Resolución de problemas: Matemática*.
- Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (2007) Nivel secundario para adultos. *Módulo de enseñanza semi presencial: Matemática, Funciones*.
- Pappas, Theoni (1996), *El encanto de la matemática*, Madrid, Zugarto.
- Pappas, Theoni (1996), *La magia de la matemática*, Madrid, Zugarto.
- Potter, Lawrence (2008), *A jugar con las matemáticas*, Barcelona Robin Book.
- Rey Pastor, Julio y Babini, José (1984), *Historia de la matemática*, Barcelona, Gedisa.
- Sánchez, Claudio (1999), *Físicamente*, Buenos Aires, Ediciones de Mente.
- Swokowski, Earl (1988), *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*, México, Grupo Editorial Iberoamericana.
- Tahan, Malba (2006), *Matemática divertida y curiosa*, Buenos Aires, Pluma y papel.
- Vessereau, André (1976), *La estadística*, Buenos Aires, EUDEBA.

OTROS RECURSOS

- Colección Fines (2009), Matemática en la vida cotidiana, 05 Geometría y medida. Buenos Aires: Canal Encuentro, Educ.ar, Ministerio de Educación de la Nación.
- Colección Fines (2009), Matemática en la vida cotidiana, 07 Estadística y Probabilidad Geometría y medida. Buenos Aires: Canal Encuentro, Educ.ar, Ministerio de Educación de la Nación.

ÍNDICE DE IMÁGENES

- Archivo General de la Nación: Imágenes para el diseño de tapa.
- Archivo Ministerio de Educación de la Nación: Imágenes para el diseño de tapa
- Cartografía José Pais: página 45.
- Ilustraciones Claudio Andaur: páginas 28, 44, 46, 48, 67, 78, 81.



